6/6/2011

Superfici quadriche

Si definisce quadrica in $\mathbb{R}^n$ euclideo, il luogo dei punti le cui coordinate soddisfino ad una equazione di 2° grado nelle n variabili $x_1, \dots, x_n$ (coordinate di $\mathbb{R}^n$):

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j + \sum_{K=1}^{n} b_K x_K + c = 0 \qquad b_K, a_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i,j,K=1,\dots,n \quad c \in \mathbb{R}.$$

Così per $n=2$ $\quad a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0$

per $n=3$ $\quad a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0$

Le curve per $n=2$ vengono chiamate coniche.

Per $n=3$ abbiamo le superfici quadriche

Per $n>3$ avremo le iperquadriche

Intuitivamente possiamo dire che l'ente descritto dall'equazione sarà di ~~[illegible]~~ dimensione $n-1$

Classifichiamo le quadriche, ovvero troviamo le forme canoniche dei vari tipi di ~~[illegible]~~ quadriche operando cambiamenti di variabile.

Queste equazioni possono essere lette in forma matriciale. La prima parte dell'equazione (quella di 2° grado) è, in realtà una forma quadratica $\Rightarrow$

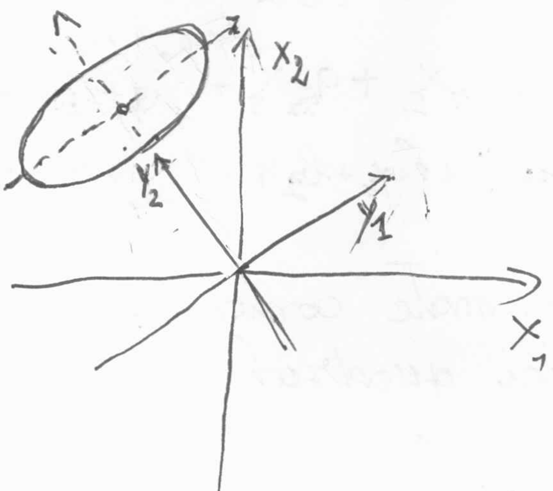
Posto $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow X^T A X + B^T X + c = 0$$

Se rg A è massimo $\Rightarrow$ la quadrica è non singolare
se rg A non è massimo $\Rightarrow$ " " è singolare

le non singolari sono quadriche a centro perché $\exists$ un centro di simmetria

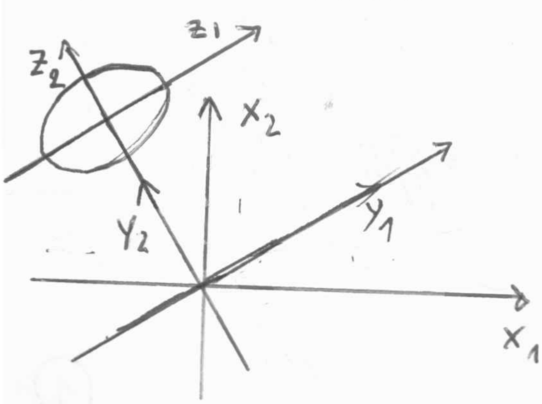
Sappiamo che A è ortogonalmente diagonalizzabile, essendo simmetrica, cioè simile ad una mat diagonale D; anche rg D è massimo. $\Rightarrow$ $D = S^{-1}AS$
S è la mat del cambiamento di coordinate.



$$y^T D y = d_{11}y_1^2 + d_{22}y_2^2 + \dots + d_{nn}y_n^2$$ dove $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ è il vettore delle nuove coordinate trovate

$$y^T D y + B_1^T \cdot y + c_1 = 0$$

Con Gauss, poi, riduco l'equazione ad una forma del tipo: $\boxed{a_{11}z_1^2 + a_{22}z_2^2 + a_{nn}z_n^2 = c_2}$



Quanti tipi diversi di quadriche a centro ci sono?

Se $c_2 > 0$ $\exists$ n tipi diversi di quadriche a centro in $\mathbb{R}^n$. Supponiamo di riordinare le coordinate in modo da scrivere prima i termini con coefficienti positivi poi ~~...~~ quei quadrati con coefficienti negativi $\Rightarrow$

(dipendono dalla segnatura (p,q) della forma quadratica)

con $n=2$

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} = 1 \qquad \text{segnatura } (2,0)$$

ellisse

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} - \frac{z_2^2}{a_2^2} = 1 \qquad \text{segnatura } (1,1)$$

iperbole

(nel caso $(0,2)$, cambiando i segni ci si riporta al $(2,0)$)

con $n=3$

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} + \frac{z_3^2}{a_3^2} = 1 \qquad \text{segnatura } (3,0)$$

ellissoide

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} - \frac{z_3^2}{a_3^2} = 1 \qquad \text{segnatura } (2,1)$$

iperboloide ad una falda

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} - \frac{z_2^2}{a_2^2} - \frac{z_3^2}{a_3^2} = 1 \qquad \text{segnatura } (1,2)$$

iperboloide a due falde

(nel caso $(0,3)$ ci si riporta al $(3,0)$)

Se $c_2 = 0$ ABBIAMO I CONI:

con $n=2$ (coni)

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} = 0$$

origine

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} - \frac{z_2^2}{a_2^2} = 0$$

coppia di rette

con $n = 3$ $$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} + \frac{z_3^2}{a_3^2} = 0$$

(superfici coniche) origine

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} - \frac{z_3^2}{a_3^2} = 0$$

superficie conica

Se $c_2 < 0$ si cambiano i segni e ci si riporta nel caso $c_2 > 0$

Quadriche non degeneri se sono presenti nella sua equazione ridotta tutte le variabili: oltre quelle già studiate troveremo come unica possibilità $$\pm\frac{z_1^2}{a_1^2} \pm \frac{z_2^2}{a_2^2} \pm \dots \pm \frac{z_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = d z_n$$

ci saranno diverse quadriche a seconda dei "+ e -"

con $n = 2$ $$\frac{z_1^2}{a_1^2} = d z_2$$

parabola

con $n = 3$ $$\frac{z_1^2}{a_1^2} + \frac{z_2^2}{a_2^2} = d z_3$$

paraboloide ellittico

$$\frac{z_1^2}{a_1^2} - \frac{z_2^2}{a_2^2} = d z_3$$

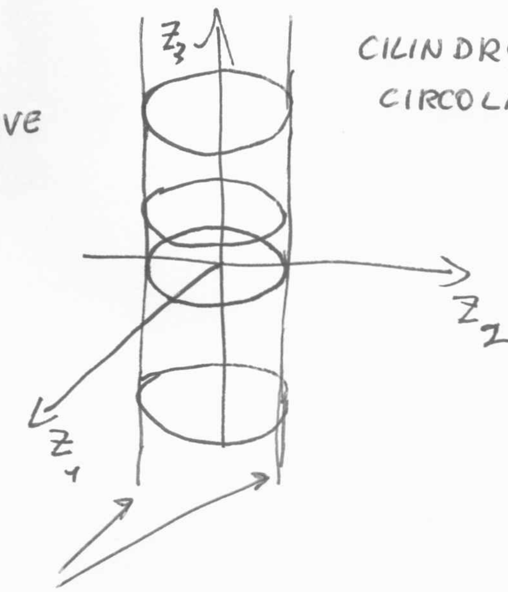
paraboloide iperbolico

Superfici degeneri

sono superfici che si spezzano IN IPERPIANI CHE SI INTERSECANO IN una superficie FORMATA DA UN IPERPIANO che si ripete più volte (es. due piani paralleli, ecc...).

Se non sono presenti tutte le variabili, le quadriche sono <u>cilindri</u>

Con $n = 3$ $\quad z_1^2 + z_2^2 = 1$



CILINDRO CIRCOLARE

PER DISEGNARLO SI DISEGNANO LE CURVE CHE SI TROVANO INTERSECANDO CON PIANI:

$$\begin{cases} z_1^2 + z_2^2 = 1 \\ z_3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{trovo una circonferenza}$$

$$\begin{cases} z_1^2 + z_2^2 = 1 \\ z_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1^2 + z_2^2 = 1 \\ z_1 = 0 \end{cases} \longrightarrow \text{coppia di rette}$$

$z_1^2 - z_2^2 = 1$ CILINDRO IPERBOLICO

$z_2 = z_1^2$ CILINDRO PARABOLICO