Due matrici A e B sono congruenti $\Leftrightarrow \exists S \in M_{n\times n}$ invertibile $| B = S^T A S$

- Il rango di matrici congruenti è ~~conservato~~ UN INVARIANTE?

Ricordo che la proposizione:

Se $B = S \cdot A$ con S invertibile $A, B, S \in M_{n\times n} \Rightarrow A$ e B hanno lo stesso rango (Analogamente per $B = A \cdot S$)

Pertanto ~~pe~~ il rango di $S^T A = rg\,A$ e $rg\,(S^T A) S = rg\,S^T A$

$\Rightarrow \underbrace{rg\,S^T A S}_{=\,rg\,B} = rg\,A$

- Si, quindi matrici congruenti hanno lo stesso rango

Posso quindi definire il rango di una forma bilineare come il rango di una delle matrici ad essa associate in una qualunque base dello spazio vettoriale V.

DEFINIZIONE ~~[illegible]~~ la forma bilineare si dice degenere SE IL RANGO NON È MASSIMO; SI DICE NON DEGENERE SE È MASSIMO.

Il determinante di una matrice associata ad F è detto ~~discriminante~~ DISCRIMINANTE della forma bilineare; ESSO È DUNQUE DEFINITO A MENO DI UN FATTORE POSITIVO (UN QUADRATO)

~~Per~~ cioè i determinanti delle matrici associate ad F nelle varie basi o sono tutti positivi, o tutti negativi, o tutti nulli

Definizione

Una forma bilineare F è detta SIMMETRICA se, dato $F: V \times V \to \mathbb{R} \Rightarrow F((v, w)) = F((w, v))\ \forall\, v\, w \in V$

Dato una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ di $V \Rightarrow [F]_B = \left(F((v_i, v_j))\right)_{i,j=1\dots n}$

se F è simmetrica $\Rightarrow [F]_B$ è simmetrica

<u>Definizione</u>

$F: V \times V \to \mathbb{R}$ è detta <u>antisimmetrica</u> (ANTISIMMETRICA) $\Leftrightarrow F((v,w)) = -F((w,v))$ $\forall v,w \in V$

le matrici associate ad F in una base qualunque di V sono antisimmetriche

$F\ V \times V \to \mathbb{R}$ è detta <u>alternante</u> (ALTERNANTE) $\Rightarrow F((v,v)) = 0, \forall v \in V$

($\Rightarrow$ LE MATRICI ASSOCIATE AD F HANNO TUTTI ZERI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE)

Su $\mathbb{R}$ ogni forma bilineare antisimmetrica è <u>alternante</u>

e viceversa: Se è antisimmetrica $\Rightarrow F(v,v) = -F(v,v)\ \forall v \in V$

ma in $\mathbb{R}$, UN NUMERO E' UGUALE AL SUO OPPOSTO $\Leftrightarrow$ E' ZERO, $\Rightarrow F(v,v) = 0\ \forall v \in V$

Esercizio: Studiare F

$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (il codom è un campo)

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto \underbrace{x_1 y_2 - 3x_2 y_1}$$

polinomio omogeneo di grado 2 quindi F bilineare

1) F è bilineare? Si perché la sua espressione analitica è data da un polinomio omogeneo di grado 2

2) F è degenere?

Fissata la base canonica $C = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ in $\mathbb{R}^2$ costruiamo la matrice $[F]_C$

$F\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = 0$

$F\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = 1$

$F\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = -3$

$F\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = 0$

$[F]_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ Il det $\neq 0$ ed il rango è 2 quindi F è non degenere il discriminante è $+3$

3) F è simmetrico?

Non è né simmetrico né antisimmetrico: O GUARDIAMO LA MATRICE $[F]_e$ OPPURE VEDIAMO SE $F((v,w)) = F((w,v))$ $\forall\, v,w \in V$ $\Rightarrow$ posto $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_2 - 3 x_2 y_1$$

$$\neq$$

$$F\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = y_1 x_2 - 3 y_2 x_1$$

4) F è alternante?

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 x_2 - 3 x_2 x_1$$
$$= -2 x_1 x_2 \neq 0 \quad \text{PER } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ NON NULLI}$$

Non è alternante ANCHE perché non è antisimmetrica

5) $B := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Trovo la matrice ~~xxx~~ di F in base B di $\mathbb{R}^2$

(1° modo)

$$[F]_B = \begin{pmatrix} F(v_1,v_1) & F(v_1,v_2) \\ F(v_2,v_1) & F(v_2,v_2) \end{pmatrix}$$

$F = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $\quad 1\cdot 1 - 3\cdot 1\cdot 1 = -2$

$F = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $\quad 1\cdot 1 - 3\cdot 2 = -5$

$F = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $\quad 2\cdot 1 - 3 = -1$

$F = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ $\quad 2 - 6 = -4$

$$[F]_B = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

il det $= 3$

2 modo

$[F]_B = S^T \cdot [F]_e \cdot S$ matrice di passaggio dalla base B alla C

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = [id]_B^C = S?$

$$[F]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[F]_B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+1 & -6+1 \\ -3+2 & -6+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$=$