REMA DI SYLVESTER (O LEGGE D'INERZIA PER LE FORME QUADRATICHE REALI)

...ta $Q: V \longrightarrow \mathbb{R}$ forma quadratica allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V

... che $[Q]_{\mathcal{B}} = \begin{array}{c} \\ p \\ \\ p+q \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & p & & p+q & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & & \\ 0 \cdots & 1 & & 0 \\ & -1 & 0 & \\ \hline & & -1 & 0 \\ 0 & & & 0 \end{array}\right) \end{array}$ cioè $[Q]_{\mathcal{B}}$ è diagonale con p "uno" e q "meno uno" sulla diagonale principale

...numeri p e q sono invarianti della forma quadratica e sono detti:

...NDICE D'INERZIA POSITIVO mentre q INDICE D'INERZIA NEGATIVO

...OSTRAZIONE: Sappiamo già che esiste una base $\mathcal{B}_1$ di V rispetto alla quale $[Q]_{\mathcal{B}_1}$ è diagonale perché se F_Q è la polare di Q allora sappiamo che $[F_Q]_{\mathcal{B}_1} = [Q]_{\mathcal{B}_1}$ e inoltre che $[F_Q]_{\mathcal{B}_1}$ è diagonale.

Sia $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e poniamo $Q(v_j) = \alpha_j > 0 \quad \forall j = 1, \dots, p$, $Q(v_i) = \beta_i < 0 \quad \forall i = p+1, \dots, p+q$ con $p+q = \mathrm{rg}\, Q$ e infine $Q(v_l) = 0$ $\forall l = p+q+1, \dots, n$.

Visto che si lavora in $\mathbb{R}$, possiamo porre $\alpha_j = a_j^2 \quad \forall j = 1, \dots, p$, $-\beta_i = b_i^2 \quad \forall i = p+1, \dots, p+q$. Allora diamo una nuova base di V con $\mathcal{B} = \left\{ \frac{v_1}{a_1}, \frac{v_2}{a_2}, \dots, \frac{v_p}{a_p}, \frac{v_{p+1}}{b_{p+1}}, \dots, \frac{v_{p+q}}{b_{p+q}}, v_{p+q+1}, \dots, v_n \right\}$.

La base di partenza $\mathcal{B}_1$ è una base F_Q-ORTOGONALE, ma anche $\mathcal{B}$ è F_Q-ORTOGONALE, infatti considerando $F_Q\left(\left(\frac{v_j}{a_j}, \frac{v_i}{b_i}\right)\right) = \frac{1}{a_j} \frac{1}{b_i} F_Q((v_j, v_i)) = 0 \quad \forall$ coppia di vettori di $\mathcal{B}$.

Quindi la matrice associata a questa base $[F_Q]_{\mathcal{B}} = [Q]_{\mathcal{B}}$ è ancora diagonale e $Q\left(\frac{v_j}{a_j}\right) = F_Q\left(\left(\frac{v_j}{a_j}, \frac{v_j}{a_j}\right)\right) = \frac{1}{a_j^2} F_Q((v_j, v_j)) = \frac{1}{a_j^2} a_j^2 = 1 \quad \forall j = 1, \dots, p$ e $F_Q\left(\left(\frac{v_i}{b_i}, \frac{v_i}{b_i}\right)\right) = \frac{1}{b_i^2} F_Q((v_i, v_i)) = \frac{1}{b_i^2} \beta_i = \frac{1}{-\beta_i} \beta_i = -1 \quad \forall i = p+1, \dots, p+q$.

Ora dobbiamo dimostrare che p e q sono invarianti, cioè qualsiasi base $\mathcal{B}$ prendiamo F_Q-ORTOGONALE TROVEREMO SEMPRE IN $[F_Q]_{\mathcal{B}}$, p TERMINI POSITIVI E q NEGATIVI SULLA DIAGONALE PRINCIPALE

Supponiamo per assurdo di trovare una base $\mathcal{B}_2$ di V con $\mathcal{B}_2=\{w_1,\dots,w_n\}$ tale che $\mathcal{B}_2$ sia F_Q-ORTOGONALE e $F_Q(w_k,w_k)=Q(w_k)>0$ per $k=1,\dots,t$, $F_Q(w_h,w_h)=Q(w_h)<0$ $\forall\, h=t+1,\dots,r$ con $r=rg\,Q$ e $Q(w_s)=0$ $\forall\, s=r+1,\dots,n$. Ipotizziamo ora che $\boxed{p\neq t}$, AD ESEMPIO CHE $p>t$; sia $U<V \mid U=\langle\langle v_1,\dots,v_p\rangle\rangle$ dove $v_1,\dots,v_p\in\mathcal{B}_1$, BASE F_Q-ORTOGONALE usata precedentemente e $W<V \mid W=\langle\langle w_{t+1},w_{t+2},\dots,w_n\rangle\rangle$ dove $w_{t+1},\dots,w_n\in\mathcal{B}_2$. Sappiamo che $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$

NEL NOSTRO CASO $\dim U=p$, $\dim W=n-t$ e $\dim(U\cap W)=0$; allora $\dim(U+W)=p+n-t$ ma avendo supposto che $p>t$, possiamo DIRE che quindi $p+n-t>n$ e ciò è un assurdo perché $U+W<V$ e $\dim V=n$. Se supponiamo $p<t$, si può ripetere il ragionamento prendendo $U=\langle\langle v_{p+1},\dots,v_n\rangle\rangle$ e $W=\langle\langle w_1,\dots,w_t\rangle\rangle$ e arriviamo all'assurdo! Quindi essendo assurdo che $p\neq t$, p sarà uguale a t.

C.V.D.

OSSERVAZIONE: Se la forma quadratica reale (e di conseguenza anche la sua polare) è definita positiva allora esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $[Q]_{\mathcal{B}}=[F_Q]_{\mathcal{B}}=I$

OSSERVAZIONE: Se $Q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ è data da $Q(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\mapsto Q(x)$$

(PER ESEMPIO $Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x_1,x_2)\mapsto a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2$) in una base iniziale $\mathcal{B}$, il teorema di Sylvester asserisce che possiamo determinare una base $\mathcal{B}_1$ di $\mathbb{R}^n$ e quindi nuove coordinate $y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^n$ nelle quali la forma quadratica Q avrà questa espressione:

$$Q(y)=y^T\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots\ 0\end{pmatrix}y=\sum_{i=1}^{p}x_i^2-\sum_{j=p+1}^{p+q}x_j^2$$

ESSA È detta FORMA CANONICA DELLA FORMA QUADRATICA.

VEDIAMO COME OTTENERLA:

METODO DI GAUSS DI RIDUZIONE A FORMA CANONICA DI UNA FORMA QUADRATICA (O METODO DI RIDUZIONE A QUADRATI)

EX1: $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$

SUPPONIAMO CHE IN $\mathbb{R}^3$ CI SIA LA BASE CANONICA $\mathcal{C}$

Andiamo a cercare una nuova base nello spazio per arrivare alla forma canonica della forma quadratica.

$$[Q]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

Il metodo di Gauss lavora con il polinomio e non con la matrice:

1. Considero i termini che contengono la prima coordinata, cioè x_1, e li riduco a quadrati: $x_1^2 + 2x_1x_2 = (x_1+x_2)^2 - x_2^2$

2. Sostituisco ciò al polinomio di partenza ottenendo:

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2 = (x_1+x_2)^2 - x_2^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$$

3. eseguo un cambiamento di coordinate $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$ e la nostra

nuova forma quadratica sarà: $Q(y) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_2y_3 + 5y_3^2$

4. Considero i termini con y_2 e li riduco a quadrati:

$$y_2^2 + 4y_2y_3 = (y_2 + 2y_3)^2 - 4y_3^2$$

ottengo così: $Q(y) = y_1^2 + (y_2+2y_3)^2 - 4y_3^2 + 5y_3^2 = y_1^2 + (y_2+2y_3)^2 + y_3^2$

5. eseguo un nuovo cambio di variabili $\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$

quindi la mia forma canonica sarà $Q(z) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

Il cambiamento di coordinate effettuato è: $\begin{cases} z_1 = x_1 + x_2 \\ z_2 = x_2 + 2x_3 \\ z_3 = x_3 \end{cases}$

EX 2: $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(x_1,x_2,x_3) \mapsto x_1x_2 + x_2x_3$

$$[Q]_e = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Qui non posso usare il metodo di Gauss come nel primo esempio poiché non ci sono quadrati su cui puntare. Ora ci baseremo sulla seguente uguaglianza algebrica: $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$

1. Raccogliamo x_2 ottenendo:

$$x_1x_2 + x_2x_3 = x_2(x_1+x_3)$$

2. Sfruttiamo l'uguaglianza algebrica e si ottiene:

$$x_2(x_1+x_3) = \frac{1}{4}\left[(x_1+x_2+x_3)^2 - (x_2-x_1-x_3)^2\right]$$

3. FACCIAMO un cambiamento di coordinate $\begin{cases} y_1 = x_1+x_2+x_3 \\ y_2 = x_2-x_1-x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

ottenendo che: $Q(y) = \frac{1}{4}y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2$

Si nota che la forma è degenere poiché il rango è 2 e non 3, la <u>segnatura della forma quadratica</u>, cioè la coppia (p,q), è $(1,1)$, mentre quella dell'esercizio 1 è $(3,0)$.

METODO DI JACOBI PER DETERMINARE SE UNA FORMA QUADRATICA È DEFINITA POSITIVA O DEFINITA NEGATIVA

Data $Q: V \to \mathbb{R}$ forma quadratica e $[Q]_B = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} = A$

possiamo determinare i minori principali della matrice A e li chiamiamo d_i. I minori principali sono $d_1 = a_{11}$ $d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

$d_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ e così via. Si dimostra che esiste una base $\tilde{B}$ di V tale che $[Q]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \frac{d_2}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_3}{d_2} & 0 \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & & \frac{d_n}{d_{n-1}} \end{pmatrix}$. La forma quadratica sarà definita positiva se i minori sono tutti positivi, mentre sarà definita negativa se i minori principali hanno segni alterni.