1

04-04-2011

FORMA BILINEARE:

$F : V \times V \to \mathbb{R}$ con V = spazio vettoriale n-dimensionale

F è bilineare se verificano:

- $F(v_1 + v_2, w) = F(v_1, w) + F(v_2, w)$
- $[F(v, w_1 + w_2) = F(v, w_1) + F(v, w_2)]$

- $F(\alpha v, w) = \alpha F(v, w)$
- $[F(v, \beta w) = \beta F(v, w)]$

$\forall v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\boxed{es}$ $V = \mathbb{R}$

- $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $(x, y) \to xy$

th: è forma bilineare? è applic. lineare?

dim: $\left.\begin{array}{l} F(x_1 + x_2, y) = (x_1 + x_2)y \\ F(x_1, y) + F(x_2, y) = x_1 y + x_2 y \end{array}\right\}$ COINCIDONO

$\left.\begin{array}{l} F(x, y_1 + y_2) = x(y_1 + y_2) \\ F(x, y_1) + F(x, y_2) = x y_1 + x y_2 \end{array}\right\}$ COINCIDONO

$\left.\begin{array}{l} F(\alpha x, y) = (\alpha x) y = \alpha (xy) = \alpha F(x, y) \\ F(x, \beta y) = x(\beta y) = \beta (xy) = \beta F(x, y) \end{array}\right\}$ COINCIDONO

$\Rightarrow$ l'applicazione è bilineare.

VEDIAMO SE È LINEARE

- $F(V_1+V_2) = F(V_1)+F(V_2)$ $\quad \forall\, V_1, V_2 \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$

$F(\alpha V) = \alpha F(V)$ $\quad \forall\, V \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ e $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

$$F(V_1+V_2) = F\big((x_1,y_1)+(x_2,y_2)\big) = F\big((x_1+x_2,\, y_1+y_2)\big) =$$

(VETTORE SOMMA DATO DALLA SOMMA delle COORDINATE)

$$= (x_1+x_2)(y_1+y_2)$$

$$\neq$$

$$F(V_1)+F(V_2) = F\big((x_1,y_1)\big)+F\big((x_2,y_2)\big) = x_1y_1+x_2y_2$$

$\Rightarrow$ l'applicazione non è lineare

PERTANTO LA BILINEARITÀ $\not\Rightarrow$ LINEARITÀ.

- <u>MATRICE ASSOCIATA AD UN'APPLICAZIONE.</u>

Fissiamo una base B_V su V con $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \Rightarrow$

Ogni vettore (SI PUÒ SCRIVERE) $V = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ cioè $[V]_{B_V} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{vettore delle coordinate di } v \text{ nella base data.}} = X$

Prendiamo un'applicazione F.

Se $F: V\times V \to \mathbb{R}$ è forma bilineare su V

$\Rightarrow$ posti $V = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ e $w = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i$ elementi di V

$$\Rightarrow F(V,w) = F\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\,,\ \sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right)\right) =$$

③ APPLICHIAMO RIPETUTAMENTE LE PROPRIETÀ DELLA BILINEARITÀ

$$= F\left(\left(x_1 v_1, \sum_{i=1}^{m} y_i v_i\right)\right) + F\left(\left(x_2 v_2, \sum_{i=1}^{m} y_i v_i\right)\right) + \dots + F\left(\left(x_m v_m, \sum_{i=1}^{m} y_i v_i\right)\right)$$

$$= x_1 F\left(\left(v_1, \sum_{i=1}^{m} y_i v_i\right)\right) + x_2 F\left(\left(v_2, \sum_{i=1}^{m} y_i v_i\right)\right) + \dots + x_m F\left(\left(v_m, \sum_{i=1}^{m} y_i v_i\right)\right) =$$

$$= x_1 \left(F((v_1, y_1 v_1)) + F((v_1, y_2 v_2)) + \dots + F((v_1, y_m v_m))\right) +$$

$$+ x_2 \left(F((v_2, y_1 v_1)) + F((v_2, y_2 v_2)) + \dots + F((v_2, y_m v_m))\right) +$$

$$+ \dots + x_m \left(F((v_m, y_1 v_1)) + F((v_m, y_2 v_2)) + \dots + F((v_m, y_m v_m))\right) =$$

$$= x_1 y_1 F(v_1, v_1) + x_1 y_2 F(v_1, v_2) + \dots + x_m y_m F(v_m, v_m)$$

Costruiamo la matrice SEGUENTE

$$\begin{pmatrix} F(v_1, v_1) & F(v_1, v_2) & \dots & F(v_1, v_m) \\ F(v_2, v_1) & F(v_2, v_2) & \dots & F(v_2, v_m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F(v_m, v_1) & F(v_m, v_2) & \dots & F(v_m, v_m) \end{pmatrix}_{m \times m} =$$

$$= [F]_{Bv}$$

$\Rightarrow$ Posto $[v]_{Bv} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = X$ e $[w]_{Bv} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = Y$

$\Rightarrow$ Si dimostra facilmente che:

$$F(v, w) = X^T [F]_{Bv} Y = \underbrace{[v]^T_{Bv}}_{\substack{\text{matrice} \\ 1 \times m}} \cdot \underbrace{[F]_{Bv}}_{\substack{\text{matrice} \\ m \times m}} \cdot \underbrace{[w]_{Bv}}_{\substack{\text{matrice} \\ m \times 1}}$$

$\boxed{es}$ $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \longrightarrow x_1 y_2 - 2x_1 y_1 + 3x_2 y_1$$

Fissiamo la base canonica in $\mathbb{R}^2$, scriviamo la matrice F nella base canonica $\mathcal{E}$

$$\Rightarrow [F]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} F(e_1, e_1) & F(e_1, e_2) \\ F(e_2, e_1) & F(e_2, e_2) \end{pmatrix}$$

Calcolo le quattro immagini:

$F(e_1, e_1)$ $\qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = (1 \cdot 0) - 2(1 \cdot 1) + 3 \cdot (0 \cdot 1) = -2$$

$$F\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (1 \cdot 1) - 2(1 \cdot 0) + 3(0 \cdot 0) = 1$$

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = (0 \cdot 0) - 2(0 \cdot 1) + 3(1 \cdot 1) = 3$$

$$F\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (0 \cdot 1) - 2(0 \cdot 1) + 3(0 \cdot 1) = 0$$

$$\Rightarrow [F]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F((v, w)) = \underset{1 \times 2}{(x_1, x_2)} \cdot \underset{2 \times 2}{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (-2x_1 + 3x_2, x_1 + 0x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$= -2x_1 y_1 + 3x_2 y_1 + x_1 y_2 \equiv$ applicazione iniziale

$\Rightarrow$ vale il viceversa.

$\Downarrow$

(5)

Data una matrice quadrata $A \in M_{n\times n}$

$\Rightarrow$ Considerato lo sp. vettor: $\mathbb{R}^n$ ed una sua base B,

$\Rightarrow$ posso costruire l'applicazione $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$$(x,y) \longmapsto X^T A Y$$

con $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

th: F è bilineare?

dim:

$$F((X_1+X_2, Y)) = F((X_1, Y)) + F((X_2, Y))$$
$$\|$$
$$(X_1+X_2)^T A Y = (X_1^T + X_2^T) A Y = \underbrace{X_1^T A Y}_{F((X_1,Y))} + \underbrace{X_2^T A Y}_{F((X_2,Y))}$$

VERIFICATA UNA CONDIZIONE DI BILINEARITÀ.

(es)

Verifica le restanti ~~[illegible]~~ PROPRIETÀ riguardo la bilinearità di F.

Se valgono anche le anche le altre ~~[illegible]~~ CONDIZIONI,

$\Rightarrow$ F è forma bilineare ~~[illegible]~~

VERIFICARE POI CHE $[F]_B \equiv A$! $\Rightarrow$ POSSIAMO AFFERMARE CHE

$\Rightarrow$ $\exists$ corrispondente biunivoca tra l'insieme delle forme bilineari su V, $Bil(V) = \{$forme bilineari $F: V \times V \to \mathbb{R}\}$, e

$M_{n\times n}$, ~~[illegible]~~ una volta fissata la base B di V

$$h: Bil(V) \longrightarrow M_{n\times n}$$
$$F \longrightarrow [F]_{BV}$$

DIRETTA

~~[illegible]~~ ~~VICEVERSA~~

(6)

e $g: \mathcal{M}_{n \times n} \longrightarrow Bil(V)$

$A \longrightarrow X^T A Y$ è l'inversa cioè $g = h^{-1}$

$\Rightarrow$ h È BIUNIVOCA. , SE È FISSATA LA BASE IN V. PERCIÒ

si può lavorare sia con le matrici, sia con le applicazioni bilineari.

Se cambio base cosa succede?

Sia $F: V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare

B_1 e B_2 basi di V

$\Rightarrow$ abbiamo $[F]_{B_1}$ e $[F]_{B_2}$

Cerchiamo il legame tra le matrici ottenute nelle due basi B_1, B_2

Dati $v, w \in V \Rightarrow$ poniamo $X_1 = [v]_{B_1}$, $X_2 = [v]_{B_2}$,

$Y_1 = [w]_{B_1}$, $Y_2 = [w]_{B_2}$

Sappiamo che $\exists$ una matrice invertibile S /

$X_2 = S X_1$ e $Y_2 = S Y_1$

$$\Rightarrow F((v, w)) = X_2^T \cdot [F]_{B_2} \cdot Y_2 = S X_1^T \cdot [F]_{B_2} \cdot S Y_1$$

$$\parallel$$

$$X_1^T [F]_{B_1} \cdot Y_1$$

$$\parallel$$

$$= S X_1^T \cdot [F]_{B_2} S Y_1 = X_1^T S^T [F]_{B_2} S Y_1 =$$

$$= X_1^T (S^T [F]_{B_2} S) Y_1 \Rightarrow$$

per l'arbitrarietà di v e w,

$$\boxed{[F]_{B_1} = S^T [F]_{B_2} \cdot S}$$

(7) PROPOSIZIONE

Due matrici quadrate A e $B \in M_{n \times n}$ sono associate alla stessa forma bilineare in basi diverse $\iff \exists$ una matrice invertibile $S \in M_{n \times n}$, con S / $B = S^T A S$

A e B in questo caso sono dette CONGRUENTI

Def: Due matrici $A, B \in M_{n \times n}$ / $\exists\, S$ invertibile / $B = S^T A S$, si dicono CONGRUENTI.

$\boxed{\text{es}}$

Dimostra che: la relazione di congruenza, tra matrici quadrate, è di EQUIVALENZA.

$\Rightarrow \begin{cases} \text{SIMMETRICA} \\ \text{TRANSITIVA} \\ \text{RIFLESSIVA} \end{cases}$

Ad ogni classe di equivalenza di matrici congruenti, corrisponde una forma bilineare su uno spazio vettoriale V, fissata una sua base B_V

Il determinante di due matrici congruenti è un invariante?

Se $B = S^T A S$ $\qquad \det A \equiv \det B$?

$$|B| = |S^T A S| = \underset{\substack{\| \\ |S|}}{|S^T|} \cdot |A| \cdot |S| = |S| \cdot |A| \cdot |S| = |S|^2 \cdot |A|$$

~~equivalente~~ *

$|B| \neq |A|$ perché differiscono per un quadrato. $\Rightarrow$ positivo

$\Rightarrow$ abbiamo una classe positiva e una negativa.