2 Maggio 2011 lunedì

Ancora sulle forme quadratiche.
Ricordiamo le cose essenziali.
Lavoriamo sullo spazio vett. V, definiamo la forma $F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica cioè tale che

$$F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 F(v_1, w) + \alpha_2 f(v_2, w)$$

(riassumiamo le 2 proprietà in 1 sola CONSIDERANDO UNA comb. lineare)

e $$F(v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2) = \beta_1 F(v, w_1) + \beta_2 F(v, w_2) \;;$$

È SIMMETRICA, CIOÈ:
e inoltre $F(v, w) = F(w, v) \ \forall \ v, w \in V$.

Abbiamo defin. i vettori F-coniugati o F-ortogonali: i VETTORI v E w TALI CHE $F(v,w) = 0$. , il codominio è $\mathbb{R}$

Dato un sottospazio $U < V \Rightarrow$ si può definire $U^{\perp} = \{ v \in V / F(v,u) = 0 \ \forall \ u \in U \}$ ($U^{\perp} = U$ F-ortogonale).

OSSERVAZIONE:
Se io ho UNA base del sottospazio...
Data una base $B_U = \{u_1, \dots, u_K\}$, $\Rightarrow U^{\perp} = \{ v \in V \mid F(v, u_i) = 0 \ \forall \ i = 1, \dots, K \}$

PROPOSIZIONE

Se F $F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ è forma bil. simm. non degenere (= grado max), $\Rightarrow$ se $\dim U = K$ $\Rightarrow \dim U^{\perp} = n - K$ (con $n = \dim V$).
(Prima di dire questo, c'è da far vedere che $U^{\perp}$ è sottospazio di $V \rightarrow$ dimostrarlo.)

Fatto qst, si mostra che la sua dimens. è $(n-K)$.
Come si fa? Si deve trovare 1 base di quel sottospazio costituita da $(n-K)$ elementi.

DIMOSTRAZIONE:
Data la base di U, $B_U = \{u_1, \dots, u_K\} \Rightarrow U^{\perp} = \{ v \in V \mid F(v, u_i) = 0 \ \forall i = 1 \dots K \}$

② ora fissiamo 1 base di V che sia completamento della base di U che abbiamo scelto.

$\Rightarrow$ diamo 1 base di V, B_V, completando B_U $\Rightarrow B_V = \{u_1, \dots, u_K, v_1, \dots, v_{n-K}\}$

$\Rightarrow$ se $v \in V \Rightarrow v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_K u_K + b_1 v_1 + \dots + b_{n-K} v_{n-K}$

$U^\perp$ è L'INSIEME DEI VETTORI $v \in V$ TALI CHE:

$$\Rightarrow \begin{cases} F(v, u_1) = 0 \\ F(v, u_2) = 0 \\ \vdots \\ F(v, u_K) = 0 \end{cases}$$

devono essere veri tt contempor. per trovare $U^\perp$.

sfruttando la proprietà di bilinearità, possiamo riscrivere il tutto come

$$\begin{cases} a_1 F(u_1, u_1) + a_2 F(u_2, u_1) + \dots + a_K F(u_K, u_1) + b_1 F(v_1, u_1) + \dots + \\ \quad + b_{n-K} F(v_{n-K}, u_1) = 0 \\ \vdots \\ a_1 F(u_1, u_K) + \dots \quad + b_{n-K} F(v_{n-K}, u_K) = 0 \end{cases}$$

Come è fatta la matrice associata a questo sistema?

$$A = \begin{pmatrix} F(u_1, u_1) & F(u_2, u_1) & \dots & F(v_{n-K}, u_1) \\ F(u_1, u_2) & F(u_2, u_2) & \dots & F(v_{n-K}, u_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F(u_1, u_K) & \dots F(u_2, u_K) & \dots \quad \dots & F(v_{n-K}, u_K) \end{pmatrix}$$

Questa è la matrice del sistema. ma cos'è anche questa matrice A?

È fatta mediante la forma bilineare F.

Abbiamo UNA SOTTOMATRICE della matrice quadrata $(n \times n)$ ([illegible] $[F]_{B_V}$ POICHÉ

$\Rightarrow$ [illegible]

③

Siccome la forma bilineare è simmetrica, $\Rightarrow F(u_1, u_2) = F(u_2, u_1)$ etc $\Rightarrow$ la possiamo scrivere nel modo in cui siamo abituati - E VEDERLA COME SOTTOMATRICE della matrice associata a F NELLA BASE B_V

$$A = \begin{pmatrix} F(u_1, u_1) & F(u_1, u_2) & \dots & F(u_1, v_{n-k}) \\ F(u_2, u_1) & F(u_2, u_2) & & F(u_2, v_{n-k}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F(u_K, u_1) & F(u_K, u_2) & & F(u_K, v_{n-k}) \end{pmatrix}$$

è sottomatrice di $[F]_{B_V}$ formata dalle prime "K" RIGHE

POICHÉ la F ~~[illegible]~~ avere rango massimo ~~sul tutto lo spazio~~, tale SOTTOMATRICE, ~~dovrebbe avere~~ ha anche lei rango max.

~~[illegible]~~

$\Rightarrow$ dentro nella sottomatrice ci saranno QUINDI k RIGHE LIN. INDIPENDENTI

$\Rightarrow$ rg $A = K$. ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$\Rightarrow$ rg A è massimo $= K$.

DUNQUE Abb. dimostr. che la matrice associata al sistema che stiamo considerando ha RANGO max, cioè K.

$\Rightarrow$ Il rg del sistema che stiamo studiando è K $\Rightarrow$ essendo il sistema 1 sistema lineare omogeneo in "n" incognite, $\Rightarrow$ possiamo avere un'ulteriore prova che lo spazio delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di V, di dimensione $(n-K)$ e tale sottospazio è $U^\perp$.

Questo funzione

Se F è non degenere.

OSSERVAZIONE

Se $F: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ è forma bilineare simmetrica NON DEGENERE $\Rightarrow$ se $U \leqslant V$, $V = U + U^\perp$. Inoltre,

Se non esistono vettori isotropi in U (cioè $U \cap U^\perp = \{0\}$) $\Rightarrow$ $V = U \oplus U^\perp$

$\Rightarrow$ ogni vettore $v \in V$ si può scrivere come somma $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in U^\perp$. Posso decomporre il vettore in 2 vettori, si chiamano **PROIEZIONI ORTOGONALI** di v sul sottospazio U, e su $U^\perp$:

u è detto PROIEZIONE ORTOGONALE di v sul sottospazio U e w proiezione ortogonale di v su $U^\perp$.

DEFINIZIONE:

Una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ di uno spazio vettor. V è detta F-ortogonale se i vettori v_i sono fra loro F-coniugati, cioè

$$F(v_i, v_j) = 0 \quad \forall\, i,j \in \{1, \dots, n\},\ i \neq j.$$

La base B è detta F-ortonormale se è F-ortogonale e

$$F(v_i, v_i) = 1 \quad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

OSSERVAZIONE:

Se B_V è F-ortogonale, $\Rightarrow [F]_{B_V}$ è diagonale.

Se B_V è F-ortonormale, $\Rightarrow [F]_{B_V}$ è I, l'identità.

(perché c'è l'ulteriore richiesta che (v_i, v_i) non siano isotropi).

PROPOSIZIONE:

Se $F: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ è forma bilineare simmetrica non nulla, $\Rightarrow$ $\exists$ sempre almeno 1 vettore non isotropo (questo si può dimostrare costruendo DIRETTAMENTE UN TALE VETTORE) osizione

e $F: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ è forma bilineare simmetrica non nulla,

› ∃ una base di V F-ortogonale.

imostrazione:

n induzione sulle dimensione di V)

il primo passo è la verifica per $n = 1$ (per $n = 0$, non c'è niente da dim.)

=) se $\dim V = 1$, => $V \underset{\text{isomorfo}}{\cong} \mathbb{R}$ e la proposizione è ovvia.

c'è solo 1 vettore nella base, $B = \{v\}$ => l'unica possibilità è un n° reale :

› se la forma bilin che sto studiando è non nulla) =>

$F]_B = F(v,v)$: **È DIAGONALE**. Per $n = 1$, è già tutto dimostrato.

) Supponiamo la proposizione verificata fino a $\dim V = n$ e dimostriamolo per $\dim V = n+1$.

Sia w un vettore non F-isotropo => considero $w^\perp$ = questo è complemento ortogonale del sottospazio generato da w, cioè $\langle\langle w \rangle\rangle$ =>

• $\langle\langle w \rangle\rangle^\perp$

(N.B. $w^\perp = \langle\langle w \rangle\rangle^\perp$ si può dimostrare, si fa vedere con le proprietà)

è un sottospazio di V di dimensione "n" e $V = \langle\langle w \rangle\rangle \oplus \langle\langle w \rangle\rangle^\perp$

=> per ipotesi induttiva ∃ una base $B_{\langle\langle w \rangle\rangle^\perp} = \{v_1, \dots, v_n\}$ F-ortogonale

=> poichè $F(w,v) = 0 \ \forall v \in \langle\langle w \rangle\rangle^\perp$ e quindi si ha anche $F(w, v_j) = 0 \ \forall j = 1, \dots, n$ => $w, v_1, \dots, v_n$ sono l. indipend. **PERCHÉ ORTOGONALI**

=> la base cercata di V è $B_V = \{w, v_1, \dots v_n\}$

=> B_V è base F-ortogonale di V.

ESERCIZIO: Dimostrare che se 2 vettori sono F-ortogonali, sono **LINEARMENTE** indipendenti.

OSSERVAZIONE:

$\exists$ una base di V, B_V tale che $[F]_{B_V}$ è diagonale.

A livello di matrici, siamo arrivati ad 1 conclusione importante.

Le matrici associate alla stessa forma bil. simmetrica in basi $\neq$ sono congruenti.

PROPOSIZIONE:

Ora abbiamo mostrato che una matrice simmetrica è sempre congruente ad una matrice diagonale:

Dato lo spazio vettoriale V n-dimensionale e $F: V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica, $\Rightarrow \exists$ una base di V, B, tale che

$$[F]_B = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ p \rightarrow \\ \\ \\ \\ p+q \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|cccc|ccc} & & & & p & & & & p+q & & & \\ a_1 & 0 & \cdots & & 0 & & & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & & a_{p-1} & 0 & & & & & & & \\ 0 & \cdots & & 0 & a_p & & & & & & & \\ \hline 0 & \cdots & & & 0 & b_1 & 0 & \cdots & & & & \\ 0 & \cdots & & & 0 & 0 & b_2 & & & & & \\ \vdots & & & & & & & \ddots & & & & \\ 0 & \cdots & & & & & & \cdots & b_q & 0 & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & & & & & & & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{array} \right)$$

con $p+q=r$, r = rango di F, $a_j > 0$ $\forall j = 1, \dots, p$ e $b_i < 0$ $\forall i = 1 \dots q$

Cioè: $B = \{u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q, v_1, \dots, v_{n-p-q}\} \mid F(u_j, u_j) > 0$ $\forall j = 1, \dots, p$, $F(w_i, w_i) < 0$ $\forall i = 1, \dots, q$; $F(v_\ell, v_\ell) = 0$ $\forall \ell = 1, \dots, n-p-q$.

"p" e "q" sono importanti perchè sono gli indici di inerzia positivi e negativi della forma bilineare simmetrica e SONO INVARIANTI

p = n° di elem. positivi $\overset{\text{sulla diagonale}}{}$ = indice di inerzia positivo

il n° "q" di elementi negativi = indice di inerzia negativo.

$p+q$, invece, è il rg. r

Tali indici d'inerzia sono propri anche della forma quadratica associata alla forma bilin. simmetrica F, che ha la stessa matrice

Vogliamo perciò dimostrare questo teorema per la forma quadratica:

PROPOSIZIONE: (Legge di INERZIA per le forme quadratiche reali) O TEOREMA DI Silvester

Data una forma quadratica $Q : V \to \mathbb{R}$ V spazio vettoriale n-dimensionale $\Rightarrow \exists$ una base B di V tale che

$$[Q]_B = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ p+q \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & 0 & \\ \vdots & \ddots & & & \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & & & \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & & & \\ & & & & & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & & & & 0 & -1 & \\ \hline & & & 0 & & & & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{cc} p & p+q \end{array}$$

QUINDI POSSIAMO TROVARE UNA BASE DELLO SPAZIO E QUINDI COORDINATE NELLE QUALI una forma canonica della quadratica sarà formata SOLO da quadrati preceduti solo da (+1) o (-1).