FORMULA DI GRASSMAN

Siano V spazio vettoriale n-dimensionale, U, W suoi sottospazi di dimensione k e p rispettivamente $\Rightarrow$

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$$

<u>Dimostrazione</u>: sia $\dim(U \cap W) = r$, $r \leq p \leq n$ e $r \leq k \leq n$

e consideriamo ~~delle~~ una base di $U \cap W$: $B_{U\cap W} = \{v_1, \dots, v_r\}$

poichè $U \cap W \leq U \Rightarrow v_1, \dots, v_r$ sono anche vettori di U, linearmente indipendenti $\Rightarrow$ possiamo considerare UNA ESTENSIONE DI TALE INSIEME DI VETTORI AD UNA BASE DI U

$B_U = \{v_1, \dots, v_r, u_1, u_2, \dots, u_{k-r}\}$, base di U che estende quella di $U \cap W$. Analogamente, essendo $U \cap W \leq W \Rightarrow$ possiamo considerare una base di W che estende quella data in $U \cap W \Rightarrow$

$\Rightarrow B_W = \{v_1, \dots v_r, w_1, \dots w_{p-r}\}$

Considero un elemento $v \in U + W \Rightarrow v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W \Rightarrow$

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_r v_r + b_1 u_1 + \dots + b_{k-r} u_{k-r} + c_1 v_1 + \dots + c_r v_r + d_1 w_1 + \dots + d_{p-r} w_{p-r}$$

$$v = (a_1 + c_1) v_1 + \dots + (a_r + c_r) v_r + b_1 u_1 + \dots + b_{k-r} u_{k-r} + d_1 w_1 + \dots + d_{p-r} w_{p-r}$$

$\Rightarrow U + W = \langle\langle v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_{k-r}, w_1, \dots, w_{p-r} \rangle\rangle$ (GENERATORI)

Tali generatori sono esattamente $r + k - r + p - r = \underset{\dim U}{k} + \underset{\dim W}{p} - \underset{\dim U\cap W}{r}$

Rimane da dimostrare che essi sono lin. indipendenti.

2)

Sia $\circledast$ $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r + \beta_1 u_1 + \dots \beta_{k-r} u_{k-r} + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_{p-r} w_{p-r} = 0$

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{k-r} u_{k-r}}_{\in U} = \underbrace{-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_{p-r} w_{p-r}}_{\in W}$$

Se $\overbrace{}^{\text{UN VETTORE}}$ $\in U$ e $W \Rightarrow$ sta nell'intersezione $U \cap W$.

$\Rightarrow -\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_{p-r} w_{p-r} \in U \cap W \Rightarrow$

BASE INTERSEZIONE

$-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_{p-r} w_{p-r} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$

$$\underbrace{\gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_{p-r} w_{p-r} + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r}_{\{v_1, \dots v_r, w_1 \dots w_{p-r}\} \text{ BASE DI } W} = 0 \quad \text{ESSENDO}$$

TUTTI I COEFFICENTI SONO NULLI. IN QUELLA COMBINAZIONE LINEARE

$\Rightarrow$ Essendo i vettori, vettori di base di W, $\Rightarrow \gamma_1 = \dots = \gamma_{p-r} = \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$

Se i γ sono $=0$, allora sostituisco a eq. iniziale $\circledast \Rightarrow$

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{k-r} u_{k-r}}_{\text{BASE DI } U} = 0$$

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = \beta_1 = \dots = \beta_{k-r} = 0$

Essendo $\{v_1 \dots v_r, u_1, \dots, u_{k-r}\}$ base di $U \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_r = \beta_1 = \dots = \beta_{k-r} = 0$

$\Rightarrow \dim U + W = k + p - r$ ESSENDO DUNQUE

$\{v_1, \dots, v_r, u_1 \dots, u_{k-r}, w_1, \dots w_{p-r}\}$ base di $U+W \Rightarrow \dim U+W = k+p-r$

N.B. Vale solo per sottospazi vettoriali!

3]

$\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U\cap W)$

$\downarrow$

+ piccolo sottospazio che contiene l'unione di U e W

$\begin{cases} \dim V = 3 \\ \dim U = 2 \\ \dim W = 2 \end{cases}$

ESEMPIO:

Se i piani U e W non coincidono $\Rightarrow$

$2 + 2 = 3 + 1$

Se ~~non~~ coincidono ($U \equiv W$)

$2 + 2 = 2 + 2$

Ricavo da eguaglianza

$2+2 = 3 + x$ e

$2+2 = 2 + y \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow y = 2$

$\Downarrow$

$\text{Dim}(U\cap W) = 1 \; (U \not\equiv W)$

$= 2 \; (U \equiv W)$

ESEMPIO: CONSIDERIAMO $V = \mathbb{R}^3$, $U = r_1$; $W = r_2$; $\dim r_1 = \dim r_2 = 1$

$\text{Dim}(r_1 + r_2) = \dim r_1 + \dim r_2 - \dim(r_1 \cap r_2)$

Se $r_1 \equiv r_2 \Rightarrow 1 = 1 + 1 - 1$ (retta stessa)

Se $r_1 \not\equiv r_2 \Rightarrow 2 = 1 + 1 - 0$ $\rightarrow$ origine (intersezione rette)

piano = + piccolo sottosp. che contiene 2 rette

---

2 piani in $\mathbb{R}^4$

$\dim(\pi_1 \cap \pi_2) = 2 + 2 - \dim(\pi_1 + \pi_2)$

Se $\pi_1 \equiv \pi_2 \Rightarrow 2 = 2 + 2 - 2$

Se $\pi_1 \not\equiv \pi_2 \Rightarrow$
- $1 = 2 + 2 - 3$
- $0 = 2 + 2 - 4$

Dati i sottospazi vett. U, W di V e le basi B_U e B_W

$\Rightarrow B_{U+W}$ = INSIEME DI VETT. LINEARMENTE INDIP. TRA QUELLI DI B_U e B_W

IN PRATICA SI TROVA COL CALCOLO MATRICIALE.

B_{U+W} è formata dai vettori linearmente indipendenti fra quelli che costituiscono le due basi riunite.

<u>Esempio</u>: Consideriamo due piani Π_1, Π_2 in $\mathbb{R}^4$

$\downarrow$ sottospazi vett. 2-dimensionali

$$\Pi_1 \begin{cases} 2x + y - t = 0 \\ 3x + t + 2z = 0 \end{cases} \qquad \Pi_2 \begin{cases} y - 4t = 0 \\ z + t - x = 0 \end{cases}$$

I) VERIFICO SE SON PIANI DAVVERO

$(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$

$$\Pi_1 \begin{cases} -t + 2x + y = 0 \\ t + 3x + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_2 \begin{cases} -4t + y = 0 \\ t - x + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_1 \underset{R_2 = R_1 + R_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{R_1 = 5R_1 - 2R_2}{\sim} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

rg $2 \Rightarrow 4 - 2 = 2 \rightarrow$ dimensione giusta

5/

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{5}y - \frac{4}{5}z \\ x = -\frac{1}{5}y - \frac{2}{5}z \end{cases}$$

t	x	y	z
3/5	-1/5	1	0
-4/5	-2/5	0	1

$$B_{\tilde{\Pi}_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$ (E' 1 BASE DI Π_1)

$$\tilde{\Pi}_2 \sim \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} t = \frac{y}{4} \\ x = \frac{y}{4} + z \end{cases}$$

t	x	y	z
1/4	1/4	1	0
0	1	0	1

$$B_{\tilde{\Pi}_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^8 \cdot (1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & -7 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 + 4(-25) =$$

$$= \underline{-85 \neq 0}$$

Rg 4 (MASSIMO)

$\Downarrow$

vettori lin. indiped.

$$\dim(\tilde{\Pi}_1 \cap \tilde{\Pi}_2) = 2 + 2 - 4 = 0$$

Se avevo $\dim(\tilde{\Pi}_1 \cap \tilde{\Pi}_2) = 1$, x trovare retta faccio sistema algebrico.