1 Giugno 2011 mercoledì

Altre applicazioni lineari nello spazio euclideo: GLI OPERATORI SIMMETRICI.

DEFINIAMO Operatori simmetrici in uno spazio euclideo $\mathbb{R}^n$: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ UN APPLICAZIONE lineare tale che $T(v) \cdot w = v \cdot T(w) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$.

Consideriamo la base ortonormale $B_{\perp_n}$, ortonormale, di $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ cerchiamo $[T]_{B_{\perp_n}}$: siano $X = [v]_{B_{\perp_n}}$ e $Y = [w]_{B_{\perp_n}}$ E PONIAMO

$A = [T]_{B_{\perp_n}} \Rightarrow [T(v)]_{B_{\perp_n}} = AX$ e $[T(w)]_{B_{\perp_n}} = AY$

Ora scriviamo l'uguaglianza DELLA DEFINIZIONE DI T è simmetrico: $T(v) \cdot w = v \cdot T(w)$ in forma matriciale: il prodotto scalare $T(v) \cdot w$, che è una forma bilineare, sarà

$$T(v) \cdot w \Rightarrow [T(v)]^T_{B_{\perp_n}} \cdot I \cdot [w]_{B_{\perp_n}} = (AX)^T I Y = X^T A^T Y$$

$$\parallel \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$$

$$v \cdot T(w) \Rightarrow [v]^T_{B_{\perp_n}} I \cdot [T(w)]_{B_{\perp_n}} = X^T I A Y = X A Y$$

$\Rightarrow X^T A^T Y = X^T A Y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. Perché questo sia vero, $A^T = A \Rightarrow$ Se l'Operatore è simmetrico $\Rightarrow$ la matrice associata a T in una base ortonormale è simmetrica.

PROPOSIZIONE (senza dim.)

Un operatore simmetrico ha tutti gli autovalori reali.

Questo significa che le radici del suo polinomio caratteristico sono sempre tutte reali.

Si dimostrerebbe per assurdo, assumendo che ce ne sia UNA RADICE complessa. SAPPIAMO CHE il teorema fondamentale dell'algebra dice che le radici dei polinomi $\in \mathbb{C}$.
Nel nostro caso, si assume che ce ne sia una complessa $\Rightarrow$ si arriva all'assurdo perciò nella dimostraz. viene che invece $\in \mathbb{R}$.

PROPOSIZIONE

Se U è un sottospazio invariante per un operatore simmetrico T
$\Rightarrow U^\perp$ è invariante per T.

Dim.

Ipotesi: se $u \in U \Rightarrow T(u) \in U$
Tesi: se $w \in U^\perp \Rightarrow T(w) \in U^\perp$

Sia $u \in U$ e $w \in U^\perp \Rightarrow T(u) \cdot w = 0 \Rightarrow T(u) \cdot w = u \cdot T(w)$
$\Rightarrow u \cdot T(w) = 0 \Rightarrow T(w) \in U^\perp$ c.v.d.

Ora vogliamo studiare questi operatori simmetrici e le loro matrici associate.

TEOREMA DI STRUTTURA PER GLI OPERATORI SIMMETRICI

Dato $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ simmetrico, $\exists$ una base $B_{\perp_n}$ dello spazio $\mathbb{R}^n$ tale che

$$[T]_{B_{\perp_n}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Dim. per INDUZIONE SULLA DIMENSIONE DELLO SPAZIO SU "n"

Primo passo: Verifica per $n = 1$. $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (operatore lineare)
$x \longmapsto \alpha x$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$B_{\perp_n} = \{1\} \Rightarrow [T]_{B_{\perp_n}} = \alpha$ è ovviamente diagonale, è una $M_{1\times 1}$ diagonale.

Secondo passo: supponiamo vero il teorema fino alla dimensione "n" e dimostriamolo per dimensione dello spazio $= n+1$.

Consideriamo $T: \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ simmetrico.

Sia λ autovalore reale di T e u un ~~suo~~ autovettore ad esso relativo. Qui sappiamo che $\exists$ sempre λ, perché sono tutti reali!

Considero il sottospazio $\mathcal{U} = \langle\langle u \rangle\rangle$. $\mathcal{U}$ è autospazio $\Rightarrow$ invariante per T. $\Rightarrow$ anche $\mathcal{U}^\perp$ è invariante per T e $\mathbb{R}^{n+1} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp \Rightarrow$ $\dim \mathcal{U}^\perp = n$ e

$$\Rightarrow \quad T\Big|_{\mathcal{U}^\perp} : \mathcal{U}^\perp \longrightarrow \mathcal{U}^\perp$$

T è ancora un operatore lineare simmetrico da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Per ipotesi induttiva, $\exists\ \tilde{B}_{\mathcal{U}^\perp}$ ortonormale tale che

$$\left[T\Big|_{\mathcal{U}^\perp}\right]_{\tilde{B}_{\mathcal{U}^\perp}} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

inoltre, poichè $\mathbb{R}^{n+1} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp \Rightarrow$ posso costruire $B_{\mathbb{R}^{n+1}} = B_{\mathcal{U}} \cup B_{\mathcal{U}^\perp}$, come $B_{\mathcal{U}}$ prendo $\frac{u}{\|u\|}$ e come base di $\mathcal{U}^\perp$ prendo $\tilde{B}_{\mathcal{U}^\perp}$

$\Rightarrow$ Tale base di $\mathbb{R}^{n+1}$ è ortonormale (è $B_{\mathbb{R}^n}$) e $[T]_{B_{\mathbb{R}^{n+1}}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$

Infatti
Ad esempio,

$$T\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{1}{\|u\|} \cdot T(u) = \text{, dove } u \text{ è l'autovettore relativo a } \lambda$$

$$= \frac{1}{\|u\|} \cdot \lambda u = \lambda \cdot \frac{u}{\|u\|}$$

$\Rightarrow$ le prime colonne della matrice che sto creando sarà

$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, inoltre le prime coordinate delle immagini degli altri vettori di base è nulla

IN QUANTO LE IMMAGINI DEI VETTORI DI $\mathcal{U}^\perp$ RIMANGONO IN $\mathcal{U}^\perp$ E QUINDI NON SONO COMBINAZIONI LINEARI DI $\frac{u}{\|u\|}$. $\Rightarrow$

$$[T]_{B_{\mathbb{R}^{m+1}}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & b_1 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & b_m \end{pmatrix}$$

c.v.d.

Questo classifica i nostri operatori simmetrici.

ANALIZZIAMO il caso $n = 2$...

Sia $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ in una base $\perp_m$ di $\mathbb{R}^2$ (ad esempio la canonica)

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = A$$

$\Rightarrow$ cerco gli autovalori di A: $\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = 0$

POLINOMIO CARATTER.
LA MIA INCOGNITA È λ.

$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda(a+c) + ac - b^2 = 0$. Troviamo le radici del polinomio caratteristico:

$$\lambda_{12} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}}{2}$$

$$\Delta = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \Rightarrow \Delta \geq 0$$

PERCIÒ LE RADICI SONO REALI!! $\exists\, \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$.

Se $\Delta > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ reali e distinte. $\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile. (gli autospazi sono obbligati ad avere dimensione 1)

Se $\Delta = 0$, $a = c$ e $b = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ c.v.d

---

Questi operatori SIMMETRICI sono anche essi trasformazioni nello spazio euclideo.
Geometricamente come si possono interpretare?

Cominciamo dal caso più semplice, l'applicazione lineare $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Studiamo geometricamente gli operatori simmetrici.

1) $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ simmetrico
$x \to \alpha x$

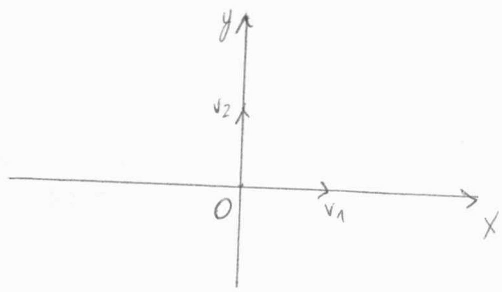
T è un'omotetia :
- dilatazione se $|\alpha| > 1$
- identità se $\alpha = 1$
- simmetria rispetto all'origine se $\alpha = -1$
- CONTRAZIONE se $|\alpha| < 1$.

e questo esaurisce tutto.

2) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\exists$ base $\perp_m$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $[T]_{B_{\perp_m}} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

I caso: $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Sia $B_{\perp_m} = \{v_1, v_2\} \Rightarrow T(v_1) = a v_1, \quad T(v_2) = 0.$



T è un'omotetia se vista ristretta all'asse x.

Caso generale.
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ riferita agli assi del riferimento, T è un'omotetia sull'asse x e un'omotetia sull'asse y.

Così si estende al caso generale. : $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ SIMMETRICO È COMPOSIZIONE DI OMOTETIE LUNGO DIREZIONI A DUE A DUE PERPENDICOLARI

Facciamo una riflessione sul teorema di struttura.

Il teorema di struttura dice che abbiamo una matrice simmetrica reale associata ad una applicazione lineare T in una base $B_{\perp_m}$ dello spazio e diamo una nuova base $\tilde{B}_{\perp_m}$ rispetto alla quale la $[T]_{\tilde{B}_{\perp_m}}$ è diagonale. $\Rightarrow [T]_{B_{\perp_m}}$ e $[T]_{\tilde{B}_{\perp_m}}$ sono simili. (stessa applicazione lineare in basi $\neq$)

e la matrice S tale che $[T]_{\tilde{B}_{\perp_m}} = S^{-1} [T]_{B_{\perp_m}} S$ ha come

colonne i vettori della base $\tilde{B}_{\perp_n}$ quindi è ortogonale. ⇒)
Ogni matrice simmetrica reale è ortogonalmente diagonalizzabile.
ABBIAMO DUNQUE DIMOSTRATO (SU $\mathbb{R}$) CHE: una matrice simmetrica, è diagonalizzabile **ortogonalmente**

Dimostriamo l'applicazione opposta (il VICEVERSA).
Se A è **ortogonalmente** diagonalizzabile, ⇒ A è simmetrica.
L'ipotesi ci dice che $\exists$ S ortogonale e D matrice diagonale tale che
$D = S^{-1}AS$. (Se S è ortogonale, è invertibile).

$$A = SDS^{-1} \underset{\Uparrow}{=} SAS^T \Rightarrow A^T = (SDS^T)^T = (S^T)^T D^T S^T =$$

ma S è ortogonale ⇒ inversa = trasposta!

$= SDS^T = A$. Pertanto la matrice è simmetrica.

c.v.d.

Abbiamo dimostrato la Proposizione: Una matrice reale quadrata è ortogonalmente diagonalizzabile ⇔ è simmetrica.

Una matrice simmetrica è congruente ad una matrice diagonale ma anche simile ad una matrice diagonale.
La congruenza si riferisce a matrici RIFERITE AD UNA FORMA BILINEARE SIMMETRICA (E QUINDI AD UNA FORMA QUADRATICA) IN BASI DIVERSE
la similitud. a matrici riferite allo stesso operatore con base $\neq$.

La relazione di similitudine è $B = S^{-1}AS$ (tra due matrici quadrate A e B)

La relazione di congruenza tra 2 matrici quadrate A e B è $B = S^TAS$.
Se S è ortogonale, ⇒ $S^{-1} = S^T$ e quindi abbiamo entrambe le relazioni vere per le stesse 2 matrici.

Una matrice simmetrica può essere vista sia come la matrice di un operatore simmetrico "T" in una base ortonormale, sia come la matrice associata ad una forma quadratica Q nella stessa base.
Tra T e Q c'è allora ovviamente una relazione e tale relazione è questa:

$$Q(v) = T(v) \cdot v \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

ESERCIZIO. Dimostrare che Q è forma quadratica. Che sia una

forma è evidente, perché manda un vettore in uno scalare,
da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. ma dobbiamo dimostrare anche che è quadratica.

Si può dimostrare anche che la matrice diagonale ottenuta diagonalizzando
ortogonalmente la matrice iniziale di T dà la forma canonica
di Q. QUANDO $Q(v) = T(v) \cdot v$. (FARLO PER ESERCIZIO)