3/11/2010 ①

Sottospazi vettoriali = sottoinsiemi dello spazio vettoriale CHE VERIFICANO DETERMINATE PROPRIETÀ

Def: Se V uno spazio vettoriale, W un sottoinsieme di V. W si definisce sottospaziovettoriale di V, $W < V$, se è chiuso rispetto alle operazioni di V, cioè:

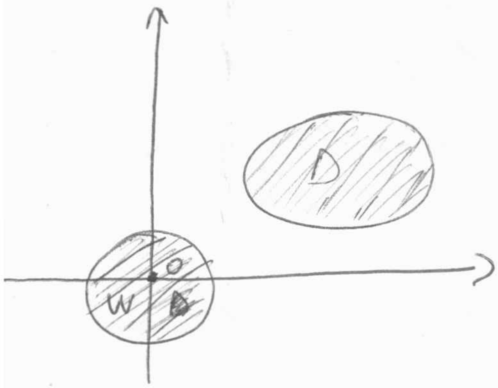
1) $\forall\ w_1, w_2 \in W \Rightarrow (w_1 + w_2) \in W$

2) $\forall\ \alpha \in$ campo K (per ogni scalare) e $\forall\ w \in W \Rightarrow \alpha w \in W$

3) $0 \in W$

Proviamo a capire il concetto con qualche esempio.

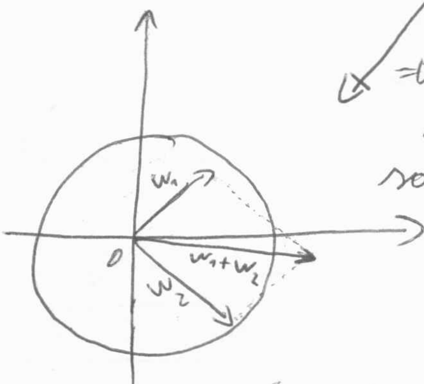
Sia $V = \mathbb{R}^2$, un piano.



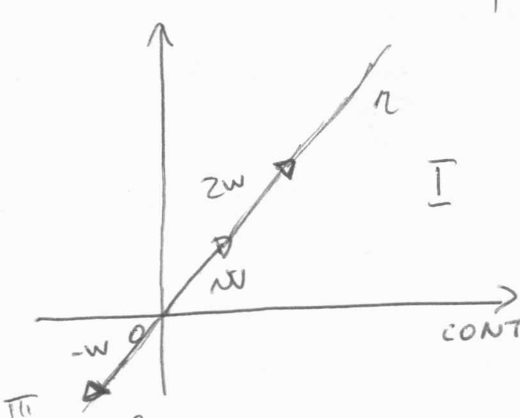
Prendiamo sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ e vediamo se sono sottospazi.

D non è un sottospazio perché non soddisfa la terza condizione $(0 \notin W)$

Considero W



$\Rightarrow$ La somma esce dal sottoinsieme e quindi W non è uno sottospazio vettoriale.



Considero i multipli del vettore w

Tutti i multipli di w stanno sulla retta generata da w.

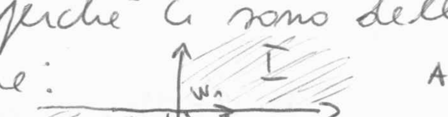
$\Rightarrow$ Uno sottospazio è un sottoinsieme ILLIMITATO perché se contiene UN VETTORE, CONTIENE LA RETTA DA ESSO GENERATA

La somma DI DUE VETTORI DI r È UN VETTORE appartenente alla retta r.

La retta r soddisfa le PROPRIETÀ DI SOTTOSPAZIO

Sottospaziovettoriale di $\mathbb{R}^2$ sono tutte le rette che passano per l'origine.

L'unione del primo e del terzo quadrante non è un sottospazio vettoriale perché ci sono delle somme che escono dal nostro sottoinsieme:



AD ESEMPIO:

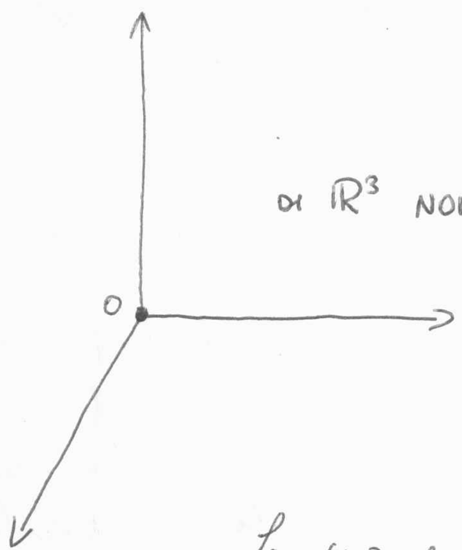
$\Rightarrow$ Oltre alle rette passanti per l'origine, l'unico sottospazio di $\mathbb{R}^2$ DI DIMENSIONE 2 è $\mathbb{R}^2$ stesso.

Anche l'origine è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$?

Banalmente si possono verificare tutte le PROPRIETÀ

$\Rightarrow \{0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ DI DIMENSIONE 0

Ora considero $\mathbb{R}^3$ (spazio tridimensionale)



L'origine deve SEMPRE appartenere al sottospazio VETTORIALE! E $\{0\}$ È SEMPRE SOTTOSP. VETTOR.

~~...~~ Un numero finito di punti DI $\mathbb{R}^3$ NON FORMA UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE: VERIFICARE!

$\mathbb{R}^3$ è un sottospazio VETTORIALE DI $\mathbb{R}^3$ di dimensione 3.

Le infinite rette passanti per l'origine vanno bene (sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$).

Le curve non vanno bene SE NON SONO RETTE!

I Piani passanti per l'origine sono sottospazi vettoriali DI $\mathbb{R}^3$

Ora diamo l'idea di dimensione.

Prima diamo qualche definizione:

In uno spazio vettoriale V si chiama $\boxed{\text{combinazione lineare}}$ (è un vettore) di n vettori $v_1, \dots, v_n$ di V la somma di tali vettori moltiplicati per scalari, cioè $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_n v_n$; $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$.

DEFINIZIONE:

I vettori $v_1, \dots, v_n \in V$ si dicono $\boxed{\text{linearmente indipendenti}}$ se posta una loro combinazione lineare = al vettore nullo,

CIOÈ: $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow$ tutti gli α_i sono nulli E VICEVERSA.

IL VICEVERSA È SEMPRE VERO, PERCIÒ BASTA DIMOSTRARE SOLO L'IMPLICAZIONE:

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \Longrightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

Se $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ anche per alcuni $\alpha_i \neq 0$ allora i vettori si dicono $\boxed{\text{linearmente dipendenti}}$.

Vediamo qualche esempio.

$V = \mathbb{R}^2$ prendiamo i vettori $v_1 = (1;2)$ e $v_2 = (3;4)$

sono linearmente indipendenti?

Consideriamo $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ e troviamo gli α_i $i = 1,2$

Sostituiamo i vettori.

$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ESEGUIAMO LE OPERAZIONI TRA VETTORI: $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\alpha_2 \\ 4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3\alpha_2 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Da questa equazione vettoriale si passa a un sistema scalare UGUAGLIANDO LE COORDINATE OMONIME:

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

associo matrice coefficienti (perché è omogeneo)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Nota: le colonne della matrice possono essere pensate come vettori: I VETTORI COLONNA DELLA MATRICE
COSÌ ANCHE PER LE RIGHE: I VETTORI RIGA DELLA MATRICE

Dobbiamo vedere se l'unica possibilità di soluzione è $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$

Il rango è 2.

Dim Spazio delle soluzioni $= \#$ variabili $- rg\Sigma$

$\overset{!}{=} 2 - 2 = 0$ è un punto $0 = (0;0)$

$\Rightarrow$ i vettori sono linearmente indipendenti

Altro esempio/ v_1, v_2, v_3 Sono linearmente indipendenti?

con $v_1 = (1;2;1)$, $v_2 = (3;4;0)$ e $v_3 = (2;2;-1)$

PONIAMO $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\alpha_2 \\ 4\alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\alpha_3 \\ 2\alpha_3 \\ -\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 0 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Mi serve la dim dello spazio delle soluzioni

$$A \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se il $rgA = 3$ la soluzione è 0.

Calcolo $\det A = (6-8) - (4-6) = -2 + 2 = 0$

Il rango non è 3, ma è 2, poiché $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \neq 0$

dim Sol $= \#$ variabili $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ $- rgA = 3 - 2 = 1$

Lo SPAZIO DELLE soluzioni è una retta passante per l'origine.

Non c'è solo soluzione nulla $\Rightarrow$ i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

Se si risolve il sistema si ha che: Sol fondamentale $u = (1;-1;1)$

Sol generale: $\{a(1;-1;1) \; a \in \mathbb{R}\}$

OSSERVAZIONE
Quando dei vettori sono dipendenti un vettore si può scrivere come combinazione lineare degli altri. (4)

Generatori di uno spazio vettoriale.

Def| Sono vettori le cui combinazioni lineari danno vita a ogni altro vettore dello spazio.

Dato lo spazio V n vettori $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ si dicono generatori di V se ogni altro vettore $v \in V$ si scrive come una loro combinazione lineare.

$\Rightarrow$ scriveremo $V = \langle\langle v_1, \dots, v_n \rangle\rangle$

ES| Ci chiediamo se $v_1(1;2;1)$ $v_2(3;4;0)$ $v_3(2;2;-1)$

Sono vettori generatori di $\mathbb{R}^3$. VEDIAMOLO DA UN PUNTO DI VISTA GEOMETRICO:

Non possono generare lo spazio perché sono tutti nello stesso piano. GENERATO DA DUE DI ESSI

Ottengo dei generatori quando ne aggiungo uno che non sia una combinazione lineare di DUE DI ESSI

Per generare lo spazio i vettori NON devono essere TUTTI linearmente indipendenti.

Esempio: aggiungo il vettore $v_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$: I VETTORI v_1, v_2, v_3, v_4 GENERANO TUTTO $\mathbb{R}^3$ MA SONO LIN. DIPENDENTI

DEFINIZIONE
$\Rightarrow$ Rango di una matrice: numero massimo di riga (VETTORI) o di VETTORI colonna linearmente indipendenti.

DEFINIZIONE: SI CHIAMA BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE V UN INSIEME DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI, generatori dello spazio vettoriale.

Base spazio vettoriale: insieme di generatori linearmente indipendenti; È il numero minimo di generatori DELLO SPAZIO VETTORIALE

In ESEMPIO di prima ne n'eravamo 3 lin. indipendenti e generatori $\Rightarrow$ LA BASE È FORMATA DA TALI VETTORI

Il # di elementi di una base (di V) si dice DIMENSIONE DI V