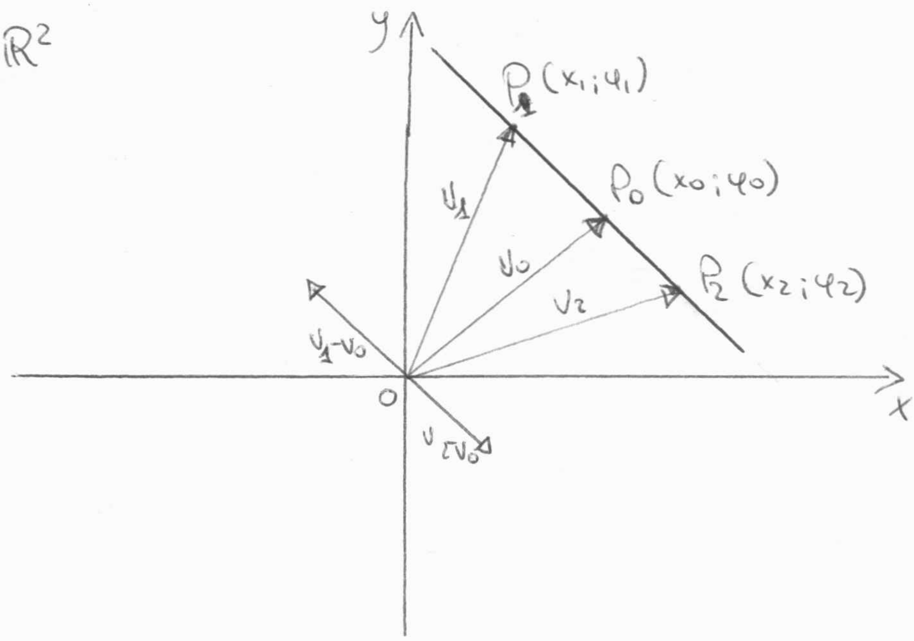
22/12/2010

DOMANDA: Quando tre punti nel piano sono allineati?

Consideriamo $\mathbb{R}^2$



Devo trovare la retta passante per questi tre punti se sono allineati.

Sono allineati quando i vettori v_1-v_0 e v_2-v_0 individuati dai segmenti P_1P_0 e P_2P_0, sono linearmente dipendenti. Quindi i vettori:

$v_1-v_0=(x_1-x_0;\ y_1-y_0)$ $\qquad$ $v_2-v_0=(x_2-x_0,\ y_2-y_0)$

individuano una matrice:

$$\begin{pmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{pmatrix}$$

con determinante nullo.

Il determinante $\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}$ è anche uguale al determinante

della matrice $\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix}$. Infatti la nostra matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_3=R_3-R_1}{\overset{R_2=R_2-R_1}{\sim}} \begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & 0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & 0 \end{pmatrix}$$

. Le operazioni applicate sono OPERAZIONI DETERMINANTALI quindi non cambiano il determinante.

DELLE MATRICI EQUIVALENTI

Se uno dei tre punti è lasciato generico, ad esempio $P_0 = P = (x; y)$ la condizione di allineamento di P, P_1, P_2 dà l'equazione della retta passante per P_1 e P_2: quindi avremo L'EQUAZIONE:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

RETTE IN $\mathbb{R}^3$

Consideriamo una retta r in $\mathbb{R}^3$: è uno SPAZIO AFFINE 1-DIMENSIONALE perciò è lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo di due equazioni in tre incognite, di rango 2.

$$\Sigma \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$ con $rg(\Sigma) = 2$. IL SISTEMA SCRITTO È EQUAZIONE CARTESIANA DI UNA RETTA in $\mathbb{R}^3$.

Determiniamo la soluzione del sistema Σ, trovando la soluzione generale dell'omogeneo associato, Σ_0, che sarà:

$t v_0$ con $t \in \mathbb{R}$ e v_0 soluzione fondamentale di Σ_0

e una soluzione particolare X_1 del sistema Σ. Allora si avrà

$$X = X_1 + t v_0$$

cioè
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Questa è l'EQUAZIONE <u>VETTORIALE</u> DELLA RETTA r in $\mathbb{R}^3$.

Ora passando al sistema scalare:

$$\begin{cases} x = x_1 + t x_0 \\ y = y_1 + t y_0 \\ z = z_1 + t z_0 \end{cases}$$

otteniamo l'EQUAZIONE <u>PARAMETRICA</u> DELLA RETTA r.

Ricavando il parametro t da una di quelle equazioni e sostituendolo nelle altre due otteniamo l'equazione cartesiana della retta.

Ricavando il parametro t in ognuna delle 3 equazioni del sistema ed eguagliando i secondi membri di ogni equazione, otteniamo l'equazione SEGMENTARIA DELLA RETTA.

$$\frac{x-x_1}{x_0} = \frac{y-y_1}{y_0} = \frac{z-z_1}{z_0}$$

x_0, y_0, z_0 sono i PARAMETRI DIRETTORI della retta r, cioè le coordinate di un vettore di base del sottospazio vettoriale che è direzione di r.

Dati due punti P_1 e P_2 di r $\Rightarrow$ con lo stesso ragionamento fatto per la retta nel piano, abbiamo l'equazione di una retta passante per due punti:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

I PARAMETRI DIRETTORI della retta r si possono determinare anche a partire dalla sua equazione cartesiana

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \end{cases}$$

mediante la matrice dei coefficienti $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ DEL SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO;

$\Rightarrow$ DETTI l, m, n I PARAMETRI DIRETTORI DELLA RETTA,

Avremo: $l = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $m = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

ESERCIZIO

$$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ -x-3y+z=2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Prima cosa da fare è vedere se il rg è 2 e ciò è vero.

Quindi r: $\begin{cases} x+y-2z=1 \\ -x-3y+z=2 \end{cases}$ EQUAZIONE CARTESIANA DI UNA RETTA.

Determiamo ora i PARAMETRI DIRETTORI di r.

$l = -5 \qquad m = 1 \qquad n = -2$

Allora sappiamo che la direzione r_0 di r è $r_0 = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$

$\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = V_0$

Determiniamo una soluzione particolare di Σ che ci dà il vettore spostamento.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{R_2 = R_1 + R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & -3/2 \end{array}\right)$$

Ottenendo così:
$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}z - \frac{3}{2} - 2z = 1 ; \; x = \frac{5}{2}z + \frac{5}{2} \\ y = -\frac{1}{2}z - \frac{3}{2} \end{cases}$$

allora:

$X_0 = (0; -1; -1)$ è un PUNTO SULLA RETTA. $\Rightarrow$

$X = X_0 + tV_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ EQUAZIONE VETTORIALE di r

E $\begin{cases} x = -5t \\ y = -1 + t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$ EQUAZIONE PARAMETRICA di r

AVENDO DUE RETTE NELLO SPAZIO COME VEDO IL PARALLELISMO?

(1) Trovo i parametri direttori e vedo se sono proporzionali

(2) oppure le metto a sistema e ragionando sul rango della matrice . . . . dei coefficienti può accadere che:

$$\text{rg}\,A = \begin{cases} 2 \Rightarrow \text{rg}(A|B) = \begin{cases} 2 \\ 3 \end{cases} \\ 3 \Rightarrow \text{rg}(A|B) = \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases} \end{cases}$$

STUDIARE GEOMETRICAMENTE I VARI CASI : ESERCIZIO

PIANI IN $\mathbb{R}^3$

L'equazione cartesiana di un piano affine in $\mathbb{R}^3$ è:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Per determinare l'EQUAZIONE PARAMETRICA trovo la soluzione generale dell'omogeneo associato $ax+by+cz=0$, che sarà $tV_1 + sV_2$ con t, s PARAMETRI REALI e V_1, V_2 SOLUZIONI FONDAMENTALI; e una soluzione particolare del non omogeneo X_0. L'equazione vettoriale risulterà essere: $X = X_0 + tV_1 + sV_2$

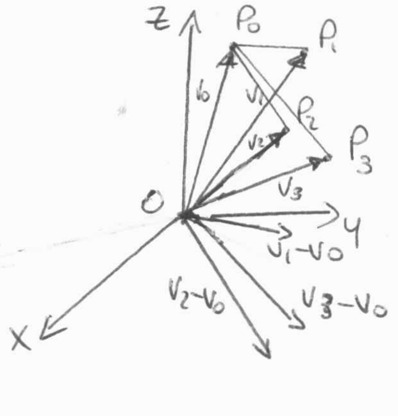
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

di conseguenza l'EQUAZIONE PARAMETRICA è:

$$\begin{cases} x = x_0 + tx_1 + sx_2 \\ y = y_0 + ty_1 + sy_2 \\ z = z_0 + tz_1 + sz_2 \end{cases}$$

Ricavando t ed s da due di quelle equazioni e sostituendoli nella terza si ottiene l'equazione cartesiana del piano.

QUANDO 4 PUNTI APPARTENGONO ALLO STESSO PIANO π?



$V_1 - V_0$, $V_2 - V_0$, $V_3 - V_0$ devono appartenere allo stesso piano π_0 passante per l'origine

Allora
$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \end{vmatrix} = 0$$
COME PER L'ALLINEAMENTO DI TRE PUNTI NEL PIANO,

CONSIDERANDO L'EQUIVALENZA DI MATRICI, SI DIMOSTRA CHE POSSIAMO IMPORRE:
$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Lasciando UN PUNTO generico ottengo l'equazione cartesiana del piano passante per 3 punti dati:
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$