29/11/2017

Proposizione: Sia $L: V \to W$ applicazione lineare tra spazi vettoriali, con $\dim V = n$ e $\dim W = p$.

Se L ha nucleo nullo $\Rightarrow$ manda elementi linearmente indip. in elementi lin. indip.

Dimostrazione per esercizio (trovare immag. di questi vettori e vedere se sono lin. ind.)

Proposizione L'applicazione composta di applicazioni lineari è lineare cioè: Siano $L: V \to W$ e $T: U \to S$ applicazioni lineari, tali che $\operatorname{Im} L \subseteq U$ condizione per la composizione delle 2 funzioni.

$\Rightarrow$ possiamo comporre $T \circ L$ e $T \circ L: V \to S$ è lineare

per dominio, dominio di L
per codominio, cod. di S

Dimostrazione Dobbiamo dimostrare che $(T \circ L)(v_1 + v_2) = (T \circ L)(v_1) + (T \circ L)(v_2)$ $\forall v_1, v_2 \in V$

e che $(T \circ L)(\alpha v) = \alpha (T \circ L)(v)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall v \in V$.

Possiamo unire queste due proprietà e prendere una combi. lineare di queste due applicazioni.

Oppure riunendo le 2 dimostriamo che $(T \circ L)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 (T \circ L)(v_1) + \alpha_2 (T \circ L)(v_2)$ $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ e $v_1, v_2 \in V$.

$(T \circ L)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = T(L(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) =$

visto che L è lineare $= T(\alpha_1 L(v_1) + \alpha_2 L(v_2)) =$ ora ho la somma di due vettori

$= T(\alpha_1 L(v_1)) + T(\alpha_2 L(v_2)) = \alpha_1 T(L(v_1)) + \alpha_2 T(L(v_2)) =$ per linearità di T.

$= \alpha_1 (T \circ L)(v_1) + \alpha_2 (T \circ L)(v_2)$ c.v.d.

Quando una funzione è invertibile?

Ricordo che $L: V \to W$ lineare (app. tra spazi vettoriali) è invertibile se e soltanto se esiste un'applicazione $T: W \to$ lineare tale che $T \circ L = id_V$ e $L \circ T = id_W$.

Denotiamo allora T con L^{-1} (applicat. inversa) Inversa dal punto di vista della composizione.

Proposizione Un'applicazione $L: V \to W$ lineare è invertibile $\Leftrightarrow$ è biettiva.

quindi per vedere se ~~questa~~ applicazione inversa è lineare basta vedere se l'applicazione è biettiva.

(gli isomorfismi sono quindi invertibili).

Come arrivare alla matrice ASSOCIATA AD UN'APPLICAZIONE LINEARE?

Sia $L: V \to W$ lineare, poniamo $\dim V = n$ e $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$; $\dim W = p$ e $B_W = \{w_1, \dots, w_p\}$

conosco applicazione se conosco l'immagine di un vettore generico.

Dato $v \in V$ conosco $L(v) \Rightarrow$ data $B_V \Rightarrow v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n$

coeff. sono le coordinate del vettore (v_1, v_2, v_n)

$$L(v) = L(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 L(v_1) + x_2 L(v_2) + \dots + x_n L(v_n)$$

per la linearità di L.

L'IMMAGINE DI UN VETTORE QUALUNQUE DI V, RISULTA QUINDI la comb. lineare DI IMMAGINI DEI VETTORI di base di V CHE POSSONO ESSERE dati ~~base di W~~ COME comb. lineari della base di W. $\Rightarrow$

PRENDO

$$[L(v)]_{B_W} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad L(v) = \sum_{j=1}^{p} y_j w_j.$$

Analogamente $L(v_1) = \sum_{j=1}^{p} a_{j1} w_j$, $L(v_2) = \sum_{j=1}^{p} a_{j2} w_j, \dots, L(v_n) = \sum_{j=1}^{p} a_{jn} w_j$

vettori DELLA BASE di partenza DEL DOMINIO

consideriamo i vettori delle coordinate* ($W \simeq \mathbb{R}^p$)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix}}_{*} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{j} \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} [L(v_1)]_{B_W} & [L(v_2)]_{B_W} & [L(v_n)]_{B_W} \end{array}$$

sto lavorando negli $\mathbb{R}^p$, sono isomorfi ~~quindi posso scrivere~~ quindi posso scrivere i vettori colonna.

Visto che ~~sistema lineare~~ (POSSIAMO VEDERE L'EQUAZIONE VETTORIALE COME UN SISTEMA lineare) ~~posso scrivere~~ posso scrivere la matrice del sistema $\Rightarrow$

vettori delle coordin. nella base scelta

$$[L(v)]_{B_W} = [L]_{B_V}^{B_W} \quad \text{base codominio, base dominio}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}_{p \times n} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n \times 1}}_{[v]_{B_V}}$$

[ci da un vettore $p \times 1$ che è quello $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$]

vettori coordinate di v che vive dentro $\mathbb{R}^n$

LA MATRICE È DATA solo dopo aver fissato le basi, matrice associata alla nostra applicazione lineare.

$\boxed{[L]_{B_V}^{B_W} \text{ è la matrice associata ad } L \text{ nelle basi } B_V \text{ e } B_W}$ decidono la matrice

Come è fatta la matrice trovata:

- ha per colonne i coeff. delle combinazione lineari CHE ESPRIMONO IMMAGINI DEI VETTORI DI BASE DI V COME COMBINAZIONI DEI VETTORI DI BASE DI W
- Abbiamo trovato matrice $p \times n$ → righe quant'è la dimensione dello spazio di partenza; colonne quant'è la dimensione dello spazio di part.

$\boxed{\text{Esempio}}$ $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2x \end{pmatrix}$

polinomi omogenei

ora devo fissare le basi per scrivere la matrice

$B_{dominio} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$B_{codominio} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Cerco la matrice associata ad L nella $B_{dominio}$, $B_{codominio}$: $[L]^{B_{codom.}}_{B_{dom.}}$

Sto cercando una matrice 2×2 a entrate reali $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$\Rightarrow [L]^{B_c}_{B_D} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

1° sistema scritto in forma matriciale

Prendo primo vettore di base $L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

devo esprimerlo come comb. lineare della base codom.

$$L\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ci sono due sistemi ~~da~~ risolvere,
hanno stessa matrice ma con
incognite diverse, conviene scrivere un'unica matrice e risolverla ~~pod~~, ad
esempio, con il metodo di Gauss.

forma a gradini canonica

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{2R_1+R_2 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2_a & -2_c \\ 0 & 1 & 2_b & 8/3_d \end{array}\right)$$

matrice che stavamo cercando.

$$\Rightarrow [L]^{B_c}_{B_D} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 8/3 \end{pmatrix}$$

quante matrici posso associare ad una ~~[illegible]~~ applicazione lineare? ∞!
c'è un caso particolare che prende come basi le basi canoniche
del dominio e del codominio:

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2x \end{pmatrix}$

1° colonna

$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

2° colonna

$L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ $\Rightarrow [L]^{e_{\mathbb{R}^2}}_{e_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Quando ho la matrice associata di un applicazione lineare so subito
che:

colonne sono imm. dei vettori di base del dominio, se scopro quanti vettori
colonna ~~queste~~ sono lin. indip. so descrivere imm. dell'app. lineare. ~~[illegible]~~

Il rango mi da la dimensione dell'immagine di L, so anche le dimensioni del nucleo. MEDIANTE IL TEOREMA DELLE DIMENSIONI

$$\mathrm{rang}\,[L]_{B_V}^{B_W} = \dim \mathrm{Im} L$$