ESERCIZIO

Tracciare il grafico della conica avente equazione nelle coordinate x,y definite dalla base canonica:

$$Q: \quad x^2 - 4xy - 2y^2 - 3x - 3y + 5 = 0$$

Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ della parte quadratica: diagonalizziamola:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(1-\lambda)(2+\lambda) - 4 = 0$$

$$-2 - \lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. È tale che $D = S^{-1} A S$

Cerco S ortogonale, perché D deve essere anche congruente ad A:

Cerco gli autovettori: $E_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x + 2y = 0$

$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|v_1\| = \sqrt{5} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$E_{-3}: \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2x + y = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\|v_2\| = \sqrt{5}$

$\Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$; prendo $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ le coordinate nella base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ si ha:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{x} + \frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{y} \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}\tilde{x} + \frac{2}{\sqrt{5}}\tilde{y} \end{cases} \Rightarrow \text{l'equazione nelle coordinate}$$

$\tilde{x}, \tilde{y}$ divente: $\quad 2\tilde{x}^2 - 3\tilde{y}^2 - 3\left(-2/\sqrt{5}\,\tilde{x} + 1/\sqrt{5}\,\tilde{y}\right) - 3\left(1/\sqrt{5}\,\tilde{x} + 2/\sqrt{5}\,\tilde{y}\right) + 5 = 0$

$\Rightarrow \; 2\sqrt{5}\,\tilde{x}^2 - 3\sqrt{5}\,\tilde{y}^2 - 9\tilde{y} + 3\tilde{x} + 5\sqrt{5} = 0$

Ora riduciamo ai quadrati:

$$2\sqrt{5}\left[\left(\tilde{x} + \frac{3}{4\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{9}{16.5}\right] - 3\sqrt{5}\left[\left(\tilde{y} + \frac{9}{6\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{81}{36.5}\right] + 5\sqrt{5} = 0$$

$$2\sqrt{5}\left(\tilde{x} + \frac{3}{4\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{9}{8\sqrt{5}} - 3\sqrt{5}\left[\left(\tilde{y} + \frac{9}{6\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{27}{4\cdot\sqrt{5}} + 5\sqrt{5} = 0\right.$$

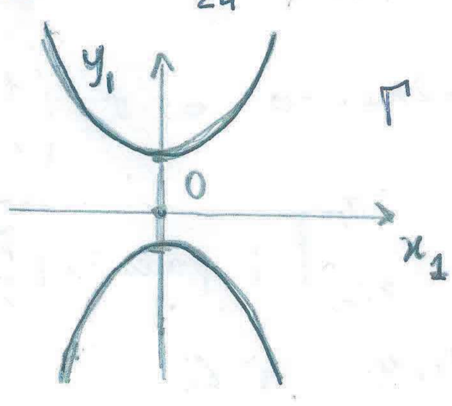
$$2\sqrt{5}\left(\tilde{x} + \frac{3}{4\sqrt{5}}\right)^2 - 3\sqrt{5}\left(\tilde{y} + \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{245}{8\sqrt{5}} = 0$$

Operiamo il cambiamento di coordinate:

$$\circledast \begin{cases} x_1 = \tilde{x} + \dfrac{3}{4\sqrt{5}} \\ y_1 = \tilde{y} + \dfrac{3}{2\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow \; -2\sqrt{5}\,x_1^2 + 3\sqrt{5}\,y_1^2 = +\frac{245}{8\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow -\frac{x_1^2}{\frac{245}{8\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}}} + \frac{y_1^2}{\frac{245}{8\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{5}}} = 1$$

$$\Rightarrow -\frac{x_1^2}{\frac{49}{16}} + \frac{y_1^2}{\frac{49}{24}} = 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{x_1^2}{\left(\frac{7}{4}\right)^2} + \frac{y_1^2}{\left(\frac{7}{2\sqrt{6}}\right)^2} = 1 \quad \underline{\text{IPERBOLE}}$$



Questa è la conica Γ nel sistema di riferimento x_1, y_1

Il cambiamento di coordinate $\circledast$ definisce una traslazione

L'origine delle coordinate $\tilde{x}, \tilde{y}$ ha coordinate rispetto alla base nelle coordinate x_1, y_1: $\left(\frac{3}{4\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)$