RIDUZIONE DI GAUSS

Sfrutteremo le formule algebriche di riduzione ai quadrati:

① $x^2+2axy=(x+ay)^2-a^2y^2$ compaiono i quadrati dei termini.

② $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$

Metodo di Gauss di riduzione di una forma quadratica a forma canonica.

Operiamo per induzione sul numero delle variabili (dim. dello spazio ambiente in cui lavoriamo).

① $n=1$: ovvio $q(x)=ax^2$ $a\in\mathbb{R}$

② Supponiamo dimostrata la proposizione ~~per~~ fino ad un numero $n-1$ di variabili e dimostriamola per n variabili, cioè $q(x_1,\dots,x_{n-1})=\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j x_j^2$ considero

$$q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2+\sum_{i\neq j}a_{ij}x_ix_j$$ in modo da dare un polinomio di 2° grado omogeneo.

Supponiamo che esista $a_{ii}\neq 0$ per almeno un indice i che poniamo $i=1$.

$$\Rightarrow q(x_1,\dots,x_n)=\underbrace{a_{11}x_1^2+R(x_2,\dots,x_n)x_1}_{\text{la riduciamo al quadrato}}+S(x_2,\dots,x_n)$$

con R polinomio omogeneo di 1° grado nelle variabili $x_2,\dots,x_n$, e S polinomio omogeneo di 2° grado nelle variabili $x_2,\dots,x_n$.

$$\Rightarrow q(x_1,\dots,x_n)=a_{11}\left[\left(x_1+\frac{R(x_2,\dots,x_n)}{2a_{11}}\right)^2-\underbrace{\frac{R(x_2,\dots,x_n)^2}{4a_{11}^2}\right]+S(x_2,\dots,x_n)}_{\text{non compare più } x_1}$$

Faccio un cambio di variabile:

$$\begin{cases} y_1=x_1+\dfrac{R(x_2,\dots,x_n)}{2a_{11}} \\ y_2=x_2 \\ y_n=x_n \end{cases}\Rightarrow q(y_1,\dots,y_n)=a_{11}y_1^2+T(y_2,\dots,y_n)$$

con T polinomio di 2° grado omogeneo.

$\Rightarrow$ per ipotesi induttiva $T(y_2,\dots,y_n)=\sum_{i=2}^{n}b_{ii}y_i^2$

pertanto $\Rightarrow q(y_1,\dots,y_n)=a_{11}y_1^2+\sum_{i=2}^{n}b_{ii}y_i^2$ COME VOLEVAMO

Supponiamo che non ci siano quadrati:

Supponiamo che inizialmente non compaiono x_i^2 e x_j^2 ma ci sia un termine con $x_i x_j$. Pongo $i=1$ e $j=2$, cioè

$$q(x_1,\dots,x_n)=a_{12}x_1x_2+R(x_3,\dots,x_n)x_1+S(x_3,\dots,x_n)x_2+T(x_3,\dots,x_n)$$

dove R e S sono forme lineari e T è forma quadratica nelle variabili $x_3,\dots,x_n$, CIOÈ È UNA forma quadratica in $n-2$ variabili., COSÌ COME È LA FORMA

$$\Rightarrow q(x)=a_{12}\left(x_1+\frac{S(x_3,\dots,x_n)}{a_{12}}\right)\left(x_2+\frac{R(x_3,\dots,x_n)}{a_{12}}\right)-\underbrace{\frac{SR}{a_{12}}+T(x_3,\dots,x_n)}$$

qui andrò applicata l'ipotesi induttiva.

cambio le variabili ponendo:

$$\begin{cases} y_1=x_1+\dfrac{S}{a_{12}} \\ y_2=x_2+\dfrac{R}{a_{12}} \\ y_3=x_3 \\ y_4=x_4 \end{cases} \Rightarrow q(y_1,\dots,y_n)=a_{12}y_1y_2+T(y_3,\dots,y_n)-\frac{SR}{a_{12}}(y_3,\dots,y_n)$$

Ora so che $a_{12}y_1y_2=a_{12}\dfrac{(y_1+y_2)^2-(y_1-y_2)^2}{4}$ => PERTANTO $q(y_1,\dots,y_n)$ È

$$q(y_1,\dots,y_n)=a_{12}\frac{(y_1+y_2)^2-(y_1-y_2)^2}{4}+T(y_3,\dots,y_n)-\frac{SR(y_3,\dots,y_n)}{a_{12}}$$

ora pongo

$$\begin{cases} z_1=y_1+y_2 \\ z_2=y_1-y_2 \\ z_3=y_3 \\ \vdots \\ z_n=y_n \end{cases} \Rightarrow q(z)=\frac{a_{12}}{4}z_1^2-\frac{a_{12}}{4}z_2^2+T(z_3,\dots,z_n)-\frac{SR}{a_{12}}(z_3,\dots,z_n)$$

Per ipotesi induttiva $T(z_3,\dots,z_n)-\dfrac{SR}{a_{12}}(z_3,\dots,z_n)=\displaystyle\sum_{j=3}^{n}\alpha_j z_j^2$

$$\Rightarrow q(z)=\frac{a_{12}}{4}z_1^2-\frac{a_{12}}{4}z_2^2+\sum_{j=3}^{n}\alpha_j z_j^2.$$ forma canonica.

ESEMPIO:

$q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-4x_1x_2+2x_1x_3+4x_2^2+x_3^2$ (supponiamo la base canonica in $\mathbb{R}^3$.)

studiarla e ridurla a forma canonica con il metodo di Gauss.

$$q(x)=x_1^2+2x_1(-2x_2+x_3)+4x_2^2+x_3^2=[x_1+(-2x_2+x_3)]^2-(-2x_2+x_3)^2+4x_2^2+x_3^2$$

$$=(x_1-2x_2+x_3)^2+4x_2x_3.$$ Ora cambio le variabili

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow q(y) = y_1^2 + 4y_2y_3 = y_1^2 + (y_2+y_3)^2 - (y_2-y_3)^2.$$

cambio le variabili

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3 \\ z_3 = y_2 - y_3 \end{cases} \Rightarrow q(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$$

sono riuscito a scriverlo come somma di quadrati.

non degenere e la sua segnatura è 2 e 1.
(quindi rg = 3)

(la matrice nella diagonale ha 1, 1, −1)

Alla fine:

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ z_2 = x_2 + x_3 \\ z_3 = x_2 - x_3 \end{cases}$$

Determinare la base "finale".

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}$$