Quando un sistema lineare non omogeneo ha soluzione? 28/02/18

1

Sia Σ un sistema lineare non omogeneo con p equazioni e n incognite: $\Sigma : AX = B$ con $A \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in M_{p\times 1}$

<u>Proposizione</u>: TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI

Σ ha soluzione $\iff$ $rg A = rg(A \,|\, B)$

<u>Dimostrazione</u>:

- "$\Rightarrow$": $\exists \bar{X} \in Sol\,\Sigma$, $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} \Rightarrow A\bar{X} = B$ cioè

$\bar{x}_1 C_A^1 + \bar{x}_2 C_A^2 + \dots + \bar{x}_n C_A^n = B$, dove C_A^j è la j-esima colonna di A

Quindi, poiché B è combinazione lineare delle colonne di A, si ha che $rg A = rg(A \,|\, B)$

- "$\Leftarrow$": la sufficienza della condizione è dimostrata rileggendo dalla fine all'inizio la dimostrazione precedente th

<u>Caso particolare</u>: TEOREMA DI CRAMER

Sia ora $\Sigma: AX = B$. Supponiamo ~~ora~~ che $A \in M_{n\times n}$ e $rg A = n$ (sistema di n equazioni, n incognite, rg massimo).

$\Rightarrow$ [In questo caso particolare $\exists$ una soluzione di Σ e tale soluzione è unica

e può essere determinata in questo modo:

1) $\bar{X} = A^{-1} B$

2) Posto $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$ tale soluzione $\Rightarrow \bar{x}_j = \dfrac{\det A_{jB}}{\det A}$, dove A_{jB} si ottiene sostituendo la j-esima colonna di A con la colonna B

Dimostrazione:

1) $\exists A^{-1}$ (per le ipotesi del teorema) $\Rightarrow$ detta $\bar{X}$ una soluzione di Σ si ha che $A\bar{X} = B \Rightarrow$ moltiplico a sinistra entrambi i membri per A^{-1} e ottengo $\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{=I} \cdot \bar{X} = A^{-1} \cdot B \Rightarrow \bar{X} = A^{-1} \cdot B$

2) $\det A_{jB} = \det(e_A^1, e_A^2, \dots e_A^{j-1}, B, e_A^{j+1} \dots, e_A^n) = \det(e_A^1, \dots e_A^{j-1}, \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i e_A^i, e_A^{j+1} \dots)$

proprietà del det $= \sum_{i=1}^{n} \det(e_A^1, \dots, e_A^{j-1}, x_i e_A^i, e_A^{j+1}, \dots, e_A^n) = \sum x_i \det(e_A^1 \dots e_A^{j-1} e_A^i e_A^{j+1} \dots e_A^n)$

(se una colonna è uguale ad un'altra $\Rightarrow \det = 0$) $= \bar{x}_j \det(e_A^1, e_A^2, \dots e_A^j, e_A^{j+1}, \dots e_A^n) = \bar{x}_j \det A$

$\Rightarrow \det A_{jB} = \bar{x}_j \det A \Rightarrow \bar{x}_j = \dfrac{\det A_{jB}}{\det A}$

Esempio:

$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-3y=-2 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $rg = 2$ $\Rightarrow$ il sistema è di Cramer

Cerco la soluzione $\bar{X} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$: $\bar{x} = \bar{x}_1 = \dfrac{\det A_{1B}}{\det A}$, $\bar{y} = \dfrac{\det A_{2B}}{\det A}$

$\det A = -3-2 = -5$

$\det A_{1B} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{-5} = \dfrac{-1}{-5} = \dfrac{1}{5}$

colonna termini noti

$\det A_{2B} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{-5} = \dfrac{-4}{-5} = \dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow \bar{X} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B$

Ci si può ricondurre ad un Σ di Cramer anche se in partenza non lo fosse, per esempio:

$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-3y-z=-2 \end{cases}$ $A \in M_{2\times3} \Rightarrow rg = 2$

la soluzione ha dim $= 1$ $(=3-2)$

posso scrivere

$\downarrow$

$\begin{cases} x+y = 1-z \\ 2x-3y = -2+z \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ $\det A = -5$

$A_{1B} = \begin{pmatrix} 1-z & 1 \\ -2+z & -3 \end{pmatrix}$; $\bar{x} = \dfrac{\det A_{1B}}{-5}$

$A_{2B} = \begin{pmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & -2+z \end{pmatrix}$; $\bar{y} = \dfrac{\det A_{2B}}{-5}$

è in funzione di z

GEOMETRIA NEL PIANO: SOTTOSPAZI AFFINI DEL PIANO

In $\mathbb{R}^2$ si hanno sottospazi affini di dim $=0$: sono tutti i punti del piano (tutti i punti sono traslazioni dell'origine O).

Le rette di $\mathbb{R}^2$ sono sottospazi affini 1-dimensionali (~~anche~~ i sottosp. vettoriali sono anche sottospazi affini, traslati del vettore nullo; non vale la relazione contraria).

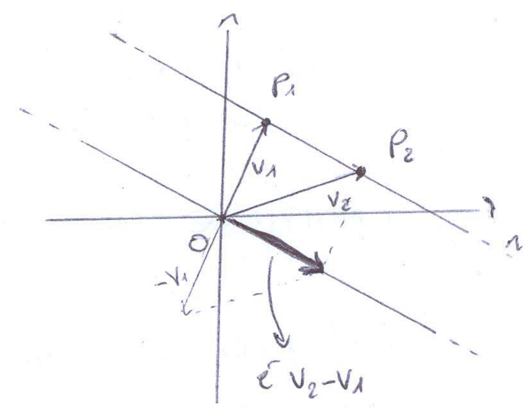
Equazione cartesiana affine di una retta nel piano: $ax+by+c=0$

Eq. parametrica deriva dalla eq. vettoriale: $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ ↳ vettore traslazione

$$\Rightarrow\begin{cases}x=sx_1+a_1\\y=sx_2+a_2\end{cases}$$

Equazione di una retta passante per 2 punti:

$P_1=(x_1;y_1)$ e $P_2=(x_2;y_2)$



$$v_2-v_1=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$$

$$X=s\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}+\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}}_{P_1}\Rightarrow\begin{cases}x=s(x_2-x_1)+x_1\\y=s(y_2-y_1)+y_1\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

ricavo s e sostituisco $\Leftarrow$ $\begin{cases}x-x_1=s(x_2-x_1)\\y-y_2=s(y_2-y_1)\end{cases}$

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}}$$

eq. cartesiana affine $\Rightarrow (x-x_1)(y_2-y_1)-(y-y_1)(x_2-x_1)=0$

è il determinante uguagliato a 0

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1\\x_2-x_1 & y_2-y_1\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix}x & y & 1\\x-x_1 & y-y_1 & 0\\x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\end{vmatrix}\xleftarrow[R_3-R_2\to R_3]{R_1-R_2\to R_2}\begin{vmatrix}x & y & 1\\x_1 & y_1 & 1\\x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0$$

Per esempio, pongo

$P_1=(1;2)$

$P_2=(4;1)$

$$\begin{vmatrix}x & y & 1\\1 & 2 & 1\\4 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\quad\Rightarrow x+3y-7=0$$ equaz. della retta

Per verificare che 3 punti siano allineati, sostituisco nella matrice alla riga 1 generica i valori del terzo punto $\Rightarrow$ deve verificare l'equazione

Due rette (hanno la stessa dimensione), sono // se hanno la stessa direzione (o giacitura)

Esempio:

$r: \begin{cases} x = s-1 \\ y = 2s \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = -s+2 \\ y = 3s-1 \end{cases}$ $\quad r // s$?

direzione di $r = r_0 = \langle\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle\rangle$; di $s = s_0 = \langle\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle\rangle$

$r_0 \equiv s_0$ solo se i vettori generatori sono ~~è~~ uno multiplo dell'altro

$\Rightarrow r \not\parallel s$

DEF: [Si dicono parametri direttori di una retta le coordinate di un vettore di base della sua direzione. Si indicano con $\begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$]

(I parametri direttori sono infiniti, perché infiniti sono i multipli del vettore generatore)

$r: \begin{cases} x = sl + a_1 \\ y = sm + a_2 \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} x = sl_1 + b_1 \\ y = sm_1 + b_2 \end{cases}$ $\quad r // s$? eq. par.

CONDIZIONE DI PARALLELISMO: $\left[r // s \iff \frac{l}{l_1} = \frac{m}{m_1} \right]$

$r: \ a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$

$s: \ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$

$r // s$? eq. cart.

$r_0: a_1 x + b_1 y = 0$ Una soluz. particolare è $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -a_1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ lo prendo come vettore della base

$s_0: a_2 x + b_2 y = 0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ -a_2 \end{pmatrix}$ parametri direttori

$\Rightarrow \left[r // s \iff \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2} \right]$

Due rette si intersecano o sono parallele?

1. Posso verificare se la condizione di parallelismo è soddisfatta
2. Oppure metto a sistema le equazioni delle rette

DEF: [Date due rette $r_1: a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ e $r_2: a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$, si definisce fascio di rette l'insieme di tutte le combinazioni lineari delle due rette date, con coefficienti nel campo K.]

$\Rightarrow$ possiamo dare l'equazione del fascio:

$$\lambda(a_1 x + b_1 y + c_1) + \mu(a_2 x + b_2 y + c_2) = 0 \qquad \forall \lambda, \mu \in K$$

Osservazioni:

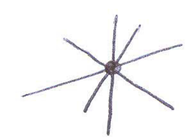
- λ e μ non possono essere entrambi nulli $\Rightarrow$ supponiamo $\lambda \neq 0$ $\Rightarrow$ divido per λ e ottengo $(a_1x+b_1y+c_1)+\frac{\mu}{\lambda}(a_2x+b_2y+c_2)=0$

  Posso porre $\frac{\mu}{\lambda}=t$ $\Rightarrow$ eq. fascio di rette $(a_1x+b_1y+c_1)+t(a_2x+b_2y+c_2)=0$

  Le due rette di partenza $\in$ sempre al fascio. Lavorando con un parametro solo, la retta moltiplicata per tale parametro non è possibile ricavarla (se pongo $t=0$, trovo l'altra retta).

- Fascio proprio e fascio improprio

PROPRIO: Se le due rette date si intersecano in un punto $\Rightarrow$ tutte le rette del fascio passano per tale punto, detto CENTRO DEL FASCIO



IMPROPRIO: Se le due rette date sono parallele $\Rightarrow$ tutte le rette del fascio sono fra loro parallele e derivano da un'unica direzione