Strutture ALGEBRICHE e matrici: (foglio 1 fronte A)

Un insieme A è detto $\boxed{\text{gruppo}}$ se è data su A un'operazione "$*$" (star), binaria, interna, $\Rightarrow$ "$*$": $A \times A \to A$: $(a_1, a_2) \mapsto a_1 * a_2$ che soddisfa le proprietà 1) associativa, 2) $\exists$ elemento neutro, 3) $\exists$ dell'inverso $\forall a \in A$.

Se vale anche la proprietà commutativa(4) $\Rightarrow (A, *)$ è detto gruppo commutativo o abeliano.

La struttura algebrica $(\mathbb{N}, +)$ non è considerabile gruppo in quanto non possiede la terza proprietà elencata, ossia l'esistenza dello INVERSO $\forall n \in \mathbb{N}$, sempre all'interno di $\mathbb{N}$. Per elemento neutro di $(A, *)$ s'intende uno specifico elemento $b \in A \mid b * a = a, \forall a \in A$

Nemmeno la struttura ALGEBRICA $(\mathbb{N}, \cdot)$ è considerabile gruppo per la stessa ragione di $(\mathbb{N}, +)$. La struttura $(\mathbb{Z}, +)$, possedendo tutte e quattro le proprietà, è un gruppo commutativo, mentre $(\mathbb{Z}, \cdot)$ non possiede la terza proprietà e non è quindi considerabile come gruppo. $(\mathbb{Q}, +)$ e $(\mathbb{Q}, \cdot)$, ~~[illegible]~~, sono chiaramente gruppi commutativi. (DA VERIFICARE)

Utilizzando contemporaneamente le operazioni di somma e prodotto, SI PUÒ DEFINIRE SULL'INSIEME A ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ una nuova struttura algebrica ~~entro~~ nella quale poter lavorare. Definizione: un insieme A è detto $\boxed{\text{anello}}$ se sono date su A due operazioni "$*$", "$\square$" binarie, interne, $\Rightarrow$ "$*$": $A \times A \to A$, "$\square$": $A \times A \to A$ per le quali sono verificate le proprietà:

1. $(A, *)$ è un gruppo abeliano;
2. "$\square$" gode della proprietà associativa;
3. Vale la proprietà distributiva di "$\square$" rispetto a "$*$".

L'anello è inoltre detto con unità se rispetta una quarta proprietà di esistenza dell'elemento neutro di "$\square$" $\Rightarrow (A, *, \square)$ È ANELLO.

Es: anello con unità è $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. In termini matematici la proprietà (3) si scrive nel modo seguente: $a_1 \square (a_2 * a_3) = (a_1 \square a_2) * (a_1 \square a_3)$ $\forall a_1, a_2, a_3 \in A$

Tra le varie strutture ALGEBRICHE, una molto importante è quella di campo. Definizione: un insieme A è detto $\boxed{\text{campo}}$ se sono date su A due operazioni "$*$" e "$\square$" binarie, interne, $\Rightarrow$ "$*$": $A \times A \to A$, $(a_1, a_2) \mapsto a_1 * a_2$

"$\square$": $A \times A \to A$, $(a_1, a_2) \mapsto a_1 \square a_2$, per le quali sono verificate le proprietà:

① $(A, "*")$ è un gruppo abeliano;

② $A - \{$elemento neutro di "$*$"$\}$ è un gruppo abeliano di "$\square$";

③ Proprietà distributiva di "$\square$" rispetto a "$*$": $a_1 \square (a_2 * a_3) = (a_1 \square a_2) * (a_1 \square a_3)$.

Esempi: 1) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un campo.

2) Consideriamo l'insieme di matrici di k righe ed n colonne su $\mathbb{R}$, già studiato: $\mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{R})$. $(\mathcal{M}_{k\times n}(\mathbb{R}), \hat{+})$ come verificato nella precedente lezione, è un gruppo additivo.

Definiamo ora il prodotto tra matrici, detto prodotto riga per colonna: data $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,n}}$ e $B = (b_{lm})_{\substack{l=1,\dots,h \\ m=1,\dots,p}}$ $\Rightarrow$ definiamo l'operazione "$\hat{\cdot}$": $\mathcal{M}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}(\mathbb{R})$, $(A, B) \mapsto A \hat{\cdot} B$. In questo modo $A \hat{\cdot} B = C$,

con $C = (c_{rs}) \mid c_{rs} = a_{r1} \cdot b_{1s} + a_{r2} \cdot b_{2s} + a_{r3} \cdot b_{3s} + \dots + a_{rn} \cdot b_{ns} = \sum_{q=1}^{n} a_{rq} \cdot b_{qs}$

Tale definizione METTE IN EVIDENZA IL FATTO CHE
Possiamo moltiplicare fra loro due matrici solo se il numero di colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda

~~definizione non ha bisogno di dimostrazione~~. Esempio:

$A = (a_{ij})_{2\times 3}$ e $B = (b_{jk})_{3\times 4} \Rightarrow AB = C = (c_{ik})_{2\times 4}$: LA MATRICE PRODOTTO HA TANTE RIGHE QUANE SONO LE RIGHE DELLA 1ª MATRICE E TANTE COLONNE QUANTE NE HA LA 2ª.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 3} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 4} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 3\cdot 2 = 5 & 2\cdot 1 + 0\cdot 2\cdot 3\cdot 1 = 5 & 4 & 7 \\ 1\cdot 0 - 1\cdot(-1) + 2\cdot(-2) = -3 & 0+0-2=-2 & 0+1-2=-1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 7 \\ -3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

TALE OPERAZIONE, QUANDO POSSIBILE, È ASSOCIATIVA CIOÈ: PRESE $A \in \mathcal{M}_{k\times n}$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}$, $C \in \mathcal{M}_{p\times e} \Rightarrow A \hat{\cdot} (B \hat{\cdot} C) = (A \hat{\cdot} B) \hat{\cdot} C$

(foglio 1 fronte B)

foglio 2 fronte

Dimostrazione della proprietà associativa:

$A \in M_{k\times n}$ $B \in M_{n\times p}$ $C \in M_{p\times l}$ $\Rightarrow B \hat{\cdot} C \in M_{n\times l} \Rightarrow A \hat{\cdot} (B \hat{\cdot} C) \in M_{k\cdot l}$

COSÌ POICHÈ $A \hat{\cdot} B \in M_{k\times p}$ $\Rightarrow (A \hat{\cdot} B) \hat{\cdot} C \in M_{k\times l}$ PERCIÒ LE DUE MATRICI $A \hat{\cdot} (B \hat{\cdot} C)$ e $(A \hat{\cdot} B) \hat{\cdot} C \in M_{k\times l}$ ENTRAMBE.

Esempio (con A e B uguali al precedente esempio). $\Rightarrow$

$A \hat{\cdot} B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 7 \\ -3 & -2 & -7 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 4}$; $C \in M_{4\times 1}$ CON $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}_{4\times 1}$ $\Rightarrow A \hat{\cdot} (B \hat{\cdot} C) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}_{2\times 1}$

$(A \hat{\cdot} B) \hat{\cdot} C = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}_{2\times 1}$, $B \hat{\cdot} C = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$ $A \hat{\cdot} (B \hat{\cdot} C) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}_{2\times 1}$

L'ESEMPIO DATO CONFERMA LA PROPRIETÀ, MA NON LA VERIFICA; PER DIMOSTRARLA DOBBIAMO USARE MATRICI GENERICHE $A = (a_{ij})$ etc...

OSSERVAZIONE:

La moltiplicazione tra matrici non gode della proprietà commutativa. : DARE UN ESEMPIO NUMERICO CHE CONFERMI TALE AFFERMAZIONE, TRA MATRICI 3X3.