26/03/2018

- Proposizione: Sia $F: V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica $\Rightarrow \exists$ sempre in V una base $B_\perp$ F-ORTOGONALE.

Dim.: per induzione sulla dimensione di $V(n)$.

1) Verifica per $n=1$: VERO (unico vettore)
2) Supponiamo verificata la proposizione per $\dim V \leq n$ e la dimostriamo per $\dim V = n+1$.

Abbiamo dimostrato l'esistenza di un vettore v NON F-ISOTROPO, cioè tale che $F(v,v) \neq 0$

$\Rightarrow$ considero il sottospazio $U = \langle\langle v \rangle\rangle$

$\Rightarrow$ U è privo di vettori isotropi poiché se

$0 \neq u = \alpha v \Rightarrow F(u,u) = F(\alpha v, \alpha v) = \alpha^2 F(v,v) \neq 0$

$\Rightarrow \exists\ U^\perp = \{ w \in V \mid F(w,u) = 0\ \forall u \in U \}$ e $\dim U^\perp = n+1-1 =$
$= n \Rightarrow$ Considero $F\big|_{U^\perp \times U^\perp} : U^\perp \times U^\perp \longrightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Per ipotesi induttiva $\exists$ una base di $U^\perp$ formata da vettori F-ortogonali. Sia B tale base,

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$

Inoltre so che $U^\perp \oplus U = V \Rightarrow$ posso dare una base di V formata dai vettori $\{v, v_1, \dots, v_n\}$
(GENERATORE di U)

La base $B_\perp = \{v, v_1, \dots, v_n\}$ è formata da vettori F-ORTOGONALI e quindi è la base cercata di V.

<u>c.v.d.</u>

OSSERVAZIONE:

Se $B_\perp$ è una base F-ortogonale di $V \Rightarrow [F]_{B_\perp} =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$ cioè è <u>DIAGONALE</u>

Pertanto ogni matrice simmetrica reale è <u>CONGRUENTE</u> ad una matrice diagonale.

- <u>TEOREMA di SILVESTER</u> (o teorema di inerzia per le forme quadratiche reali)

(A) Sia $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica reale; supponiamo che $rg\, F = r \leq n$

$\Rightarrow \exists$ una base $B_\perp$ F-ORTOGONALE tale che

$$[F]_{B_\perp} = \begin{array}{c} \\ \\ p \\ \\ r \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & & & & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & & & & 0 & \\ \vdots & & \ddots 1 & & & & & & \\ \hline 0 & & & -1 & & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & & 0 & \\ & & & & & -1 & & & \\ \hline & & & & & & 0 & & \\ & 0 & & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{array}\right]$$

(B) I numeri p e $q = r - p$ sono <u>INVARIANTI</u> e sono detti <u>INDICI di INERZIA</u>.

- p è detto INVARIANTE di INERZIA POSITIVO (o INDICE POSITIVO)
- q è detto INVARIANTE di INERZIA NEGATIVO (o INDICE NEGATIVO)

La coppia (p, q) caratterizza univocamente la forma quadratica associata ad F ed è detta la SEGNATURA della forma quadratica.

(Dim) (A): Sappiamo che esiste una base B di $\mathbb{R}^n$, F-ORTOGONALE tale che $[F]_B = D$: possiamo prendere i vettori di tale base in modo che i primi p elementi della ~~ma~~ diagonale della matrice D siano positivi, i successivi $r-p$ negativi, ed i restanti $n-r$ NULLI.

Cioè
$$d_{ii} > 0 \quad \forall i = 1, \dots, p$$
$$d_{ii} < 0 \quad \forall i = p+1, \dots, r$$
$$d_{ii} = 0 \quad \forall i = r+1, \dots, n$$

$\Rightarrow$ essendo $d_{ii} > 0 \ \forall i = 1, \dots, p \Rightarrow \exists\ p$ numeri reali α_i tali che $\alpha_i^2 = d_{ii}$,

essendo $d_{ii} < 0 \ \forall i = p+1, \dots, r \Rightarrow \exists\ q$ numeri reali β_i tali che $\beta_i^2 = -d_{ii}$

$\Rightarrow$ posta $B_\perp = \{v_1, \dots, v_n\}$ la base presa

$\Rightarrow$ costruisco una nuova base

$$\tilde{B} = \left\{ \frac{v_1}{\alpha_1}, \frac{v_2}{\alpha_2}, \dots, \frac{v_p}{\alpha_p}, \frac{v_{p+1}}{\beta_{p+1}}, \dots, \frac{v_r}{\beta_r}, v_{r+1}, \dots v_n \right\}$$

$\Rightarrow$

$$[F]_{\tilde{B}} = \begin{array}{c} \\ \\ p \\ \\ r \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \hline & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ \hline & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

vettori di $\tilde{B}$ sono F- ORTOGONALI poiché $F\left(\left(\frac{v_i}{\alpha_i}, \frac{v_j}{\alpha_j}\right)\right) =$

$= \frac{1}{\alpha_i \alpha_j} F((v_i, v_j))$; $F\left(\left(\frac{v_i}{\alpha_i}, \frac{v_j}{\beta_j}\right)\right) = \frac{1}{\alpha_i \beta_j} F((v_i, v_j))$

$(=0)$

COSTRUISCO $[F]_{\tilde{B}}$: $a_{11} = F\left(\left(\frac{v_1}{\alpha_1}, \frac{v_1}{\alpha_1}\right)\right) = \frac{1}{\alpha_1^2} F(v_1, v_1) =$

$= \frac{d_{11}}{\alpha_1^2} = 1$ e $\forall j = 1, \dots, p$ si

ha $a_{jj} = F\left(\left(\frac{v_j}{\alpha_j}, \frac{v_j}{\alpha_j}\right)\right) = \frac{1}{\alpha_j^2} F((v_j, v_j)) = \frac{d_{jj}}{\alpha_j^2} = 1$.

$a_{p+1,p+1} = F\left(\left(\frac{v_{p+1}}{\beta_{p+1}}, \frac{v_{p+1}}{\beta_{p+1}}\right)\right) = \frac{1}{\beta_{p+1}^2} F((v_{p+1}, v_{p+1})) = -1$

e $a_{ll} = F\left(\left(\frac{v_l}{\beta_l}, \frac{v_l}{\beta_l}\right)\right) = \frac{1}{\beta_l^2} F((v_l, v_l)) = \frac{d_{ll}}{\beta_l^2} = -1 \quad \forall l = p+1, \dots, r$

Infine $a_{kk} = F((v_k, v_k)) = 0 \quad \forall k = r+1, \dots, n$.

DIM B : invarianza degli INDICI di INERZIA.

<u>Per assurdo</u> supponiamo l'esistenza di un'altra base $\hat{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$ tale che $F((w_j, w_j)) > 0$ $\forall j = 1, \dots, t$ e $F((w_i, w_i)) < 0$ $\forall i = t+1, \dots, r$ e $F((w_j, w_j)) = 0$ $\forall j = r+1, \dots, n$

Supponiamo $t < p$, costruiamo $V = \langle\langle v_1, \dots, v_p \rangle\rangle$ tali che $v_j \in B_\perp$ con $F((v_j, v_j)) > 0 \quad \forall j = 1, \dots, p$

e $W = \langle\langle w_{t+1}, \dots, w_n \rangle\rangle$

$\Rightarrow$ Sappiamo che $\underset{\overset{\|}{p}}{\dim V} + \underset{\overset{\|}{n-t}}{\dim W} - \dim V \cap W = \dim \mathbb{R}^n = n$

$\dim V \cap W = p + \cancel{n} - t - \cancel{n} > 0$

- Se $v \in V \cap W \Rightarrow v \in V \Rightarrow F((v, v)) = F\left(\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v_i\right)\right) =$

$= \alpha_1^2 F((v_1, v_1)) + \alpha_2^2 F((v_2, v_2)) + \dots + \alpha_p^2 F((v_p, v_p))$

$\Rightarrow F((v, v)) > 0$

- Se $v \in W \Rightarrow v = \sum_{j=t+1}^{n} \beta_j w_j \Rightarrow F((w, w)) =$

$= F\left(\left(\sum_{j=t+1}^{n} \beta_j w_j, \sum_{j=t+1}^{n} \beta_j w_j\right)\right) < 0$ ASSURDO

- Se supponiamo $p < t$, rifacendo lo stesso ragionamento si arriva allo stesso assurdo $\Rightarrow \boxed{p = t}$

c.v.d.

OSSERVAZIONE:

- Se la ~~[illegible]~~ SEGNATURA è $(n, 0)$ con $n = \dim V$ spazio ambiente $\Rightarrow$ la FORMA QUADRATICA è DEFINITA POSITIVA:

Poiché $p = n$ la forma è NON DEGENERE (cioè rango F = rango $q = n$)

$$F((v,v)) = F\left(\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 F((v_i, v_i)) > 0$$ con $v \neq 0 \Rightarrow$ LA FORMA BILINEARE E QUINDI LA QUADRATICA È DEFINITA POSITIVA

(ANALOGAMENTE se la segnatura è $(0,n)$ la forma è DEFINITA NEGATIVA)

OSSERVAZIONE:

Se la forma bilineare $\underbrace{}_{\text{SIMMETRICA}}$ F è definita POSITIVA $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ una base B tale che $[F]_B = I$.

Se Determino una base $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ tale che

$$[F]_{B_1} = \begin{array}{c} p \\ r \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{c|c|c} 1 \ddots 1 & & \\ \hline & -1 \ddots -1 & \\ \hline & & 0 \end{array}\right) = \begin{array}{c} \\ p \\ r \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} p \quad\quad r \\ \left(\begin{array}{c|c|c} I & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$\Rightarrow$ dato v tale che $[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q(v) = F((v,v)) = X^T [F]_{B_1} X =$$

$$= (x_1, \dots, x_n) \left(\begin{array}{c|c|c} I & & \\ \hline & -I & \\ \hline & & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_p, -x_{p+1}, \dots, -x_r, 0, \dots, 0) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$$

FORMA CANONICA della FORMA QUADRATICA

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Se elimino una riga e una colonna otteniamo una SOTTOMATRICE IL CUI DETERMINANTE È UN **MINORE** DI ORDINE 2;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$ si definisce

I **MINORI PRINCIPALI** SI OTTENGONO DA SOTTOMATRICI con le ~~stesse~~ ~~...~~ di RIGHE e LE COLONNE CHE OCCUPANO LA STESSA POSIZIONE NELLA MATRICE INIZIALE;

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

MINORE PRINCIPALE di NORD-OVEST di ORDINE 2.

UN MINORE PRINCIPALE DI N-O DI ORDINE k È IL DETERMINANTE DI UNA SOTTOMATRICE FORMATA DALLE PRIME k RIGHE e LE PRIME k COLONNE

- **PROPOSIZIONE 1)** Data $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ FORMA QUADRATICA, essa è **definita POSITIVA** $\Longleftrightarrow$ tutti i **minori principali di NORD-OVEST** (DI OGNI ORDINE) della matrice associata in una base qualunque SONO **POSITIVI**.

- **PROPOSIZIONE 2)** Q è **definita NEGATIVA** $\Longleftrightarrow$ i MINORI PRINCIPALI di N-O di ordine k SONO:
  - POSITIVI per i k PARI
  - NEGATIVI per i k DISPARI

TALI PROPOSIZIONI sono COROLLARI della seguente

- **PROPOSIZIONE** (METODO di JACOBI):

  Sia $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ FORMA QUADRATICA, B una base di $\mathbb{R}^n$ e $A = [Q]_B$,

  Supponiamo che i MINORI di N-O, d_k SIANO $\neq 0 \ \forall k = 1, \dots, n-1$

  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, B_1$ base di $\mathbb{R}^n$ tale che $[Q]_{B_1} =$

$$= \begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & \frac{d_2}{d_1} & & & \\ & & \frac{d_3}{d_2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{d_n}{d_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Come conseguenza ~~della~~ otteniamo il TEOREMA di JACOBI:

Nelle ipotesi precedenti e posta B_1, base tale che

$$[Q]_{B_1} = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{d_n}{d_{n-1}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Q È DEFINITA POSITIVA $\Leftrightarrow d_j > 0 \ \forall\, j = 1, \dots, n$

Q È DEFINITA NEGATIVA $\Leftrightarrow (-1)^j d_j > 0 \ \forall\, j = 1, \dots, n$

Tale metodo non ci da, però, la base B_1. OCCORRE un altro metodo

---

La forma quadratica e la sua POLARE hanno la STESSA matrice associata a una base ~~[illegible]~~ dello spazio:

$$A = [q]_B = [F_q]_B$$

Si ha $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica

$\Rightarrow$ definisco $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$r \mapsto F((r, r))$ $\Rightarrow$ POSTO

$[v]_B = X \Rightarrow Q(v) = F_Q((v,v)) = X^T [F_Q]_B X$

$\Rightarrow$ LA MATRICE ASSOCIATA A Q È $[F_Q]_B$.

ESEMPIO: $Q: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto \underline{x^2+2y^2-2xy}$

CERCO LA MATRICE ASSOCIATA A Q:

(PROVARE CON LA FORMA BILINEARE CORRISPONDENTE)

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cc} & x & y \\ \hline x & 1 & -1 \\ y & -1 & 2 \end{array}$$

$\Rightarrow$ FISSATA LA BASE CANONICA, LA MATRICE ASSOCIATA HA PER ENTRATE DELLA DIAGONALE a_{ii} I COEFFICIENTI DEI TERMINI x_i^2, COME a_{ij} I COEFFICIENTI DEI TERMINI $x_i x_j$, DIVISI PER 2.