LEZIONE 26/02/2018

Sia V spazio vettoriale n-dimensionale e $a \in V \Rightarrow$ si definisce l'applicazione $t_a : V \longrightarrow V$, $v \longmapsto v+a$

t_a è biettiva? È iniettiva: siano $t_a(v_1) = t_a(v_2) \Rightarrow v_1 + a = v_2 + a \Rightarrow v_1 = v_2$

è suriettiva: sia $w \in$ Codominio V di $t_a \Rightarrow \exists\ v \in$ Dominio V tale che $w = v + a$? Sì, $v = w - a \Rightarrow t_a$ è biettiva

t_a è lineare? Dati v_1 e $v_2 \in V \Rightarrow t_a(v_1+v_2) = t_a(v_1) + t_a(v_2)$?

$v_1 + v_2 + a \neq v_1 + a + v_2 + a \Rightarrow t_a$ non è lineare a meno di porre $a = 0$

t_a è detta <u>TRASLAZIONE DI VETTORE a</u>.

<u>DEFINIZIONE</u>: i traslati di sottospazi vettoriali sono detti SOTTOSPAZI AFFINI (o varietà lineari) di V. Perciò $\mathcal{A} \subseteq V$ è sottospazio affine di $V \iff \exists$ un sottospazio vettoriale W di V ed un vettore $a \in \mathcal{A}$ tale che $\mathcal{A} = W + a$.

Il vettore $a \in \mathcal{A}$ che definisce il sottospazio affine non è unico: infatti, preso $b \in \mathcal{A}$ si dimostra che $\mathcal{A} = a + W = b + W$. Dimostriamo che $a \in b + W$ e che $b \in a + W = \mathcal{A}$ (già dato).
Dimostro che $a \in b + W$, cioè $\exists\ w \in W$ tale che $a = b + w \Rightarrow$ si sa che $b = a + u$ con $u \in W$.
Infatti, preso $w = a - b \in W$ perché essendo $b = a + u \Rightarrow a - b = \cancel{a} - \cancel{a} - u \in W$.

Invece, il sottospazio vettoriale W è unico: infatti, se $\mathcal{A} = a + W$ e $\mathcal{A} = a + W_1$ con $W_1 \leq V \Rightarrow$
$\Rightarrow a + W = a + W_1 \iff W = W_1$. Esiste quindi un unico sottospazio vettoriale che definisce il sottospazio affine $\mathcal{A}$, ed è detto <u>DIREZIONE</u> o <u>GIACITURA</u> di $\mathcal{A}$.

EQUAZIONE PARAMETRICA DEL SOTTOSPAZIO AFFINE

So che $\mathcal{A} = W + a$ con $W \leq V$ e $a \in \mathcal{A} \Rightarrow$ sia $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{A} \Rightarrow X = w + a$ con $w \in W$ e $a = (a_1, \dots, a_n)$.
Fissata in W una base $B_W = \{w_1, \dots, w_k\} \Rightarrow w = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{1n} \end{pmatrix} +$

$$+ \lambda_2 \begin{pmatrix} w_{21} \\ \vdots \\ w_{2n} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_k \begin{pmatrix} w_{k1} \\ \vdots \\ w_{kn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda_1 w_{11} + \lambda_2 w_{21} + \dots + \lambda_k w_{k1} + a_1 \\ x_2 = \lambda_1 w_{21} + \lambda_2 w_{22} + \dots + \lambda_k w_{k2} + a_2 \\ \vdots \\ x_n = \lambda_1 w_{1n} + \lambda_2 w_{2n} + \dots + \lambda_k w_{kn} + a_n \end{cases} \rightarrow \text{EQUAZIONE PARAMETRICA DI } \mathcal{A}$$

Si ottiene un sistema lineare non omogeneo con n equazioni e k incognite $\rightarrow k = \dim W \Rightarrow k \leq n$. In realtà $k < n$, essendo W un sottospazio proprio di V

Di conseguenza, il rango del sistema = rango della matrice dei coefficienti sarà k dato che le colonne della matrice dei coefficienti sono i vettori della base e quindi sono linearmente indipendenti. Allora si possono determinare i valori degli λ_j, sostituirli nelle rimanenti $m-k$ equazioni del sistema $\Rightarrow$ tali equazioni forniscono l'equazione cartesiana del sottospazio affine $\mathcal{A}$.

<u>Osservazione</u>: ogni sottospazio affine di V è lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo.

Esempio:

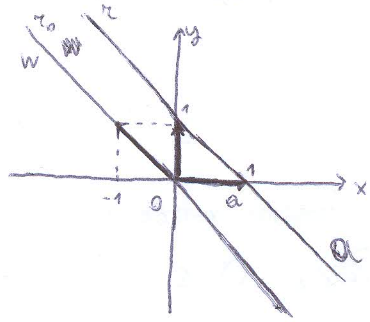
Sia $V=\mathbb{R}^2$ con base canonica, $a=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow t_a: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+1\\y\end{pmatrix}$$

Sia $W: x+y=0 \Rightarrow \mathcal{A} = W + a \Rightarrow$

Fisso $B_W=\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

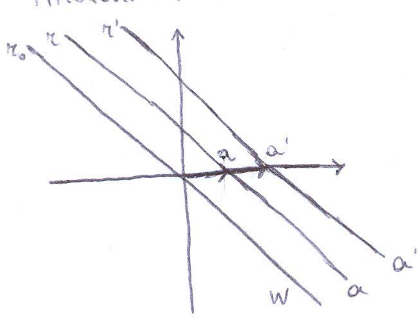
$$\mathcal{A}: \begin{cases} x=-s+1 \\ y=s \end{cases} \Rightarrow x=-y+1 \Rightarrow x+y=1$$



<u>Definizione</u>: la dimensione di un sottospazio affine $\mathcal{A}$ è definita come la dimensione della sua direzione W dove $\mathcal{A}=W+a$.

Esempio:

Riconducendosi all'esempio precedente e prendendo il vettore a', si ha:



<u>Definizione</u>: siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ due sottospazi affini di V, con $\dim \mathcal{A} < \dim \mathcal{A}' \Rightarrow \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ sono detti <u>paralleli</u>, $\mathcal{A} \parallel \mathcal{A}' \Leftrightarrow \operatorname{dir} \mathcal{A} \subset \operatorname{dir} \mathcal{A}'$. (direzione di $\mathcal{A} \subset$ direzione di $\mathcal{A}'$)

Se $\dim \mathcal{A} = \dim \mathcal{A}' \Rightarrow \mathcal{A} \parallel \mathcal{A}' \Leftrightarrow \operatorname{dir} \mathcal{A} = \operatorname{dir} \mathcal{A}'$.

Dimostriamo che lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo è un sottospazio affine: sia $\Sigma: AX=B$ con $A \in M_{m\times n}$, $X \in M_{n\times 1}$, $B \in M_{m\times 1}$, $\Sigma_0: AX=0$ è il sistema omogeneo associato, cioè con la stessa matrice dei coefficienti. Voglio dimostrare che $\operatorname{sol}\Sigma = \operatorname{sol}\Sigma_0 + \bar{X}$ con $\bar{X}$ soluzione particolare di Σ:

1) $\operatorname{sol}\Sigma \subseteq \operatorname{sol}\Sigma_0 + \bar{X}$, quindi considero una soluzione di Σ, $Y \Rightarrow AY=B$, inoltre $A\bar{X}=B \Rightarrow AY=A\bar{X}$ $\Rightarrow AY-A\bar{X}=0 \Rightarrow A(Y-\bar{X})=0 \Rightarrow Y-\bar{X} \in \operatorname{sol}\Sigma_0$, cioè $Y-\bar{X}=X_0 \Rightarrow Y=X_0+\bar{X}$, che $\in \operatorname{sol}\Sigma_0+\bar{X}$.

LEZIONE 26/02/2018

2) sol $\Sigma_0 + \bar{X} \subseteq$ sol Σ: PRENDO $X_0 + \bar{X} \in$ sol $\Sigma_0 + \bar{X} \Rightarrow X_0 + \bar{X} \in$ sol Σ?, CIOÈ $A(X_0 + \bar{X}) = B$?

$\Rightarrow A(X_0 + \bar{X}) = AX_0 + A\bar{X} = 0 + B = B.$

RISOLVERE UN SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO

ESEMPIO:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ -x - y - z = 2 \end{cases} \qquad AX = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{RG}A = 2 \Rightarrow \text{RG}\,\Sigma_0 = 2$$

PER PRIMA COSA, SI RISOLVE IL SISTEMA OMOGENEO Σ_0

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \qquad \text{DIM sol } \Sigma_0 = 1 \qquad \begin{cases} x = -y - z \\ z = -y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow$$

x	y	z
0	1	-1

$$\text{sol } \Sigma_0 = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

ORA SI CERCA LA SOLUZIONE PARTICOLARE $\bar{X} \in$ sol Σ

$$\begin{cases} x = -y - z - 2 \\ -y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ z = -y - 1 \end{cases} \qquad \bar{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{sol } \Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI DI UN SISTEMA LINEARE NON OMOGENEO È COSTITUITO DALLE SOMME DELLA SOLUZIONE GENERALE DEL SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO CON UNA SOLUZIONE PARTICOLARE DEL SISTEMA NON OMOGENEO