29/10/2017

Sia $(V; +; \cdot \lambda)$ uno spazio vettoriale nel campo $\mathbb{R}$ e W un sottoinsieme di V

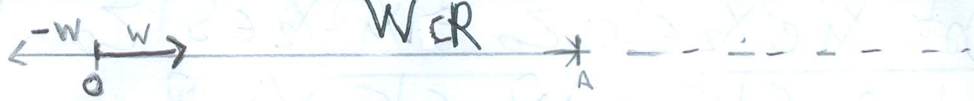
Definizione: W è detto SOTTOSPAZIO VETTORIALE di V se:

I): $0 \in W$

II): W è CHIUSO rispetto alle operazioni di V cioè $\forall w_1, w_2 \in W$ si ha $w_1 + w_2 \in W$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $w \in W$ $\lambda w \in W$

esempi: 1) Sia $V = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ CONSIDERO LA SEMIRETTA W DI $\mathbb{R}^2$:

$W \subseteq \mathbb{R}^2$



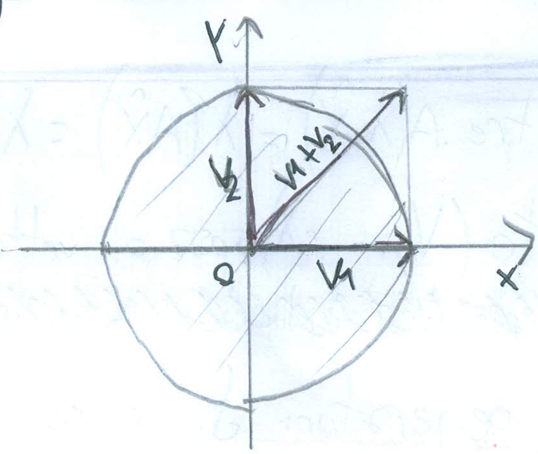
$OA = W$

W non è uno sottospazio in quanto $-w$ non appartiene a W

2) $W = D(0,1)$ disco con centro in $(0,0)$ e raggio 1 SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}^2 = V$

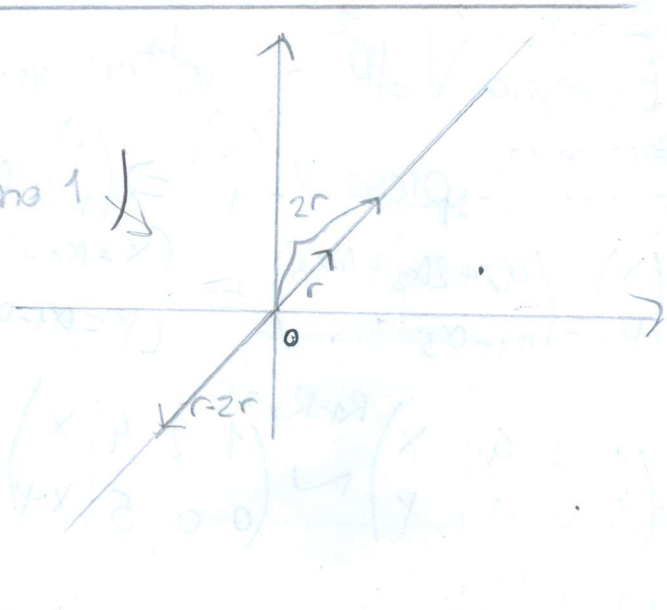
$D(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

$D(0,1)$ non è un sottospazio POICHÉ NON VERIFICA II)



Sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^2$:

- l'origine $O = (0,0)$ (dimensione 0)
- tutte le rette passanti per O (dimensione 1)
- lo spazio stesso (dimensione 2)



Per $\mathbb{R}^3$ invece abbiamo O, tutte le rette passanti per O, tutti i piani passanti per O e $\mathbb{R}^3$ stesso

ESERCIZIO: Considero un sistema lineare omogeneo $\Sigma_0: AX = O$ con $A \in M_{p \times n}$ e $X \in M_{n \times 1}$ e $O \in M_{p \times 1}$

$Sol\,\Sigma_0$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$: $Sol\,\Sigma_0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$: INFATTI:

I): $O \in Sol\,\Sigma_0$ $\exists$ sempre $(A \cdot O = O)$ LA SOLUZIONE NULLA PER UN SISTEMA OMOGENEO

II): Dati X_1 e $X_2 \in Sol\,\Sigma_0 \Rightarrow X_1 + X_2 \in Sol\,\Sigma_0$ (da dimostrare)

Dato $\hat{X} \in Sol\,\Sigma_0 \Rightarrow \lambda \hat{X} \in Sol\,\Sigma_0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (da dimostrare)

Devo dimostrare che $X_1 + X_2 \in Sol\,\Sigma_0$, cioè $A(X_1 + X_2) = 0$ INFATTI:

$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0 + 0 = 0$ (AX_1 e AX_2 sono uguali a zero in quanto X_1 e X_2 soddisfano $AX = 0$)

Inoltre $A(\lambda \hat{X}) = \lambda (A\hat{X}) = \lambda 0 = 0$

Dato $(V, +, \cdot\lambda)$ spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ i vettori $v_1, \dots, v_k \in V$ sono

detti <u>generatori</u> di V se ogni altro vettore di V è loro combinazione lineare cioè $\forall v \in V\ \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \mid v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$

esempio: $V = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ generano $\mathbb{R}^2$

DEVO DIMOSTRARE CHE: preso $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ PER QUALCHE $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 \\ \alpha_1 - \alpha_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 \\ y = \alpha_1 - \alpha_3 \end{cases}$ SISTEMA LINEARE dobbiamo verificare che abbia soluzioni

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & x \\ 1 & 0 & -1 & y \end{array}\right) \overset{R_1 - R_2 \to R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & x \\ 0 & 0 & 5 & x-y \end{array}\right)$ rg sistema $= 2 \Rightarrow$ abbiamo $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni

Un unico vettore non può generare $\mathbb{R}^2$! ESEMPIO $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$? NON SEMPRE! se prendo $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha \\ 2 = \alpha \end{cases}$ è impossibile!

Definizione: Dato V spazio vettoriale su $\mathbb{R} \Rightarrow$ i vettori $v_1, \dots, v_k$ si dicono linearmente indipendenti se posto $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$, l'unica k-upla possibile perchè la combinazione sia uguale al vettore nullo è $\overbrace{(0, \dots, 0)}^{k}$

Se $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \neq (0, \dots, 0)$ che è soluzione dell'equazione precedente allora i vettori si dicono linearmente dipendenti.

Esempio: $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$: sono linearmente indipendenti?

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0\\ \alpha_1 - \alpha_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow rg = 2 \Rightarrow \infty^1 \text{ soluzioni}$$

Questi tre vettori sono linearmente dipendenti.

Definizione: Una BASE di V è un insieme di vettori di V linearmente indipendenti e generatori.

Esempio: considero $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\right\}$ è base di $\mathbb{R}^2$?

verifico che siano linearmente indipendenti: $\overbrace{\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}^{\text{PONGO}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0\\ \alpha_1 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad rg = 2 \Rightarrow \exists\, 1 \text{ soluzione UNICA: } (\alpha_1 ; \alpha_2) = (0,0)$$

I due vettori sono linearmente indipendenti.

Verifico che siano vettori generatori (di $\mathbb{R}^2$) $\Rightarrow \alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{cases}\alpha_1 + \alpha_2 = x\\ \alpha_1 = y\end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & x\\ 1 & 0 & y\end{array}\right) \Rightarrow rg = 2 \Rightarrow$$ il sistema ha soluzione $\neq 0$, CHE DIPENDE DAL VETTORE $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1 = y\\ \alpha_2 = \dfrac{x - y}{2}\end{cases}$$ I due vettori sono generatori. Dunque B è una base di $\mathbb{R}^2$.

(# ELEMENTI DI UN INSIEME FINITO

Definizione: Dimensione di V spazio vettoriale è la cardinalità di una base

Il vettore nullo è sempre linearmente dipendente dagli altri vettori e quindi non ~~essa~~ può fare parte di una base. (da dimostrare per casa)

Proposizione: Due basi di V hanno la stessa cardinalità

Dimostrazione per assurdo: $\exists B_1 = \{v_1, \dots, v_k\}$ e $B_2 = \{w_1, \dots, w_l\}$ $k \neq l$

Suppongo $k < l \Rightarrow$ prendo B_1 come base di V