22/11/2017

DIMOSTRARE CHE ImL É SOTTOSPAZIO DI W

$L: V \longrightarrow W$ lineare $\Rightarrow$ ImL sottospazio vettoriale di W?

① $ImL = \{ w \in W$ per i quali $\exists v \in V \mid L(v) = w \}$

↳ $0_W \in ImL$? Sí, perché esiste un vettore appartenente al dominio che ha per immagine il vettore nullo 0_W ed é il vettore nullo di V.

② $w_1 + w_2 \in ImL$ se w_1 e $w_2 \in ImL$? Sí

↳ $\exists v_1 \in V \mid L(v_1) = w_1$ e $\exists v_2 \in V \mid L(v_2) = w_2$

$w_1 + w_2 = L(v_1) + L(v_2)$,

L é lineare per ipotesi $\Rightarrow L(v_1) + L(v_2) = L(v_1 + v_2)$

$\Rightarrow w_1 + w_2 \in ImL$

ha come immagine $w_1 + w_2$

③ $w \in ImL$ e $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha w \in ImL$?

↳ $\exists v \in V \mid L(v) = w$

$\alpha w = \alpha L(v)$

L é lineare per ipotesi $\Rightarrow \alpha L(v) = L(\alpha v)$

$\Rightarrow \alpha w \in ImL$

ha come immagine αw

C.V.D.

ESEMPIO

$L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ (lineare)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x+y \\ -y+z \\ 3x \\ x+y+z \end{pmatrix}$$

- Cerco Ker L $\Rightarrow$ cerco i vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tali che $L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^4}$

Risolvo matrice associata

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2x+y \\ -y+z \\ 3x \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=0 \\ -y+z=0 \\ 3x=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{matrix} 3R_1-2R_3\to R_3 \\ 2R_1-2R_4\to R_4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3R_2+R_3\to R_3 \\ R_2-R_4\to R_4 \end{matrix} \qquad R_3-R_4\to R_4$$

$$\sim\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg = 3$

∞^0 soluzioni $= 0$

$\Rightarrow \ker L = \{0\}$

- $\operatorname{Im} L$: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} L \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -y+z \\ 3x \\ x+y+z \end{pmatrix}$

Questa volta il sistema non sarà omogeneo.
$\Rightarrow$ Devo usare la matrice COMPLETA.

$$\begin{cases} 2x+y = x_1 \\ -y+z = x_2 \\ 3x = x_3 \\ x+y+z = x_4 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_2 \\ 3 & 0 & 0 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_2 \\ 0 & 3 & 0 & 3x_1-2x_3 \\ 0 & -1 & -2 & x_1-2x_4 \end{array}\right) \sim$$

(ho replicato le stesse operazioni elementari riga effettuate per la matrice dei coefficienti)

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 3 & 3x_2+3x_1-2x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_2-x_1+2x_4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

Perché il sistema sia risolubile devo porre che:

$$\boxed{x_2 - x_1 + 2x_4 = 0}$$

questa relazione fra le coordinate del codominio è l'equazione di $\operatorname{Im} L$ che IN QUESTO CASO è uno spazio TRIDIMENSIONALE in $\mathbb{R}^4$.

- **PROPOSIZIONE**: Un'applicazione lineare $L: V \to W$ è iniettiva $\iff \ker = \{0\}$

DIMOSTRAZIONE: ① Dimostro la NECESSITÀ della condizione
② Dimostro la SUFFICIENZA della condizione

① L è iniettiva cioè $L(v_1) = L(v_2) \iff v_1 = v_2$
↳ Voglio dimostrare che $\ker L = \{0\}$

$\Rightarrow$ se prendo $v \in \mathrm{Ker}L \Rightarrow v = 0$

· Se $v \in \mathrm{Ker}L \Rightarrow L(v) = 0_W \Rightarrow L(v) = L(0_V)$

$\Rightarrow$ Per iniettività insiemistica $v = 0_V$ quindi nel nucleo ho solo il vettore nullo.

2) $\mathrm{Ker}L = \{0_V\}$

$\hookrightarrow$ considero $L(v_1) = L(v_2) \Rightarrow L(v_1) - L(v_2) = 0_W$

L è ~~iniettiva~~ lineare $\Rightarrow L(v_1) - L(v_2) = L(v_1 - v_2) = 0_W$

$\Rightarrow (v_1 - v_2) \in \mathrm{Ker}L = \{0\}$

$\Rightarrow (v_1 - v_2) = 0_V \Rightarrow v_1 = v_2$ L è iniettiva.

C.V.D.

PROPOSIZIONE. Data $L: V \to W$ lineare $\Rightarrow \dim \mathrm{Ker}L + \dim \mathrm{Im}L = \dim V$

(TEOREMA DELLE DIMENSIONI)

DIMOSTRAZIONE:

Poniamo $\dim V = n$

$\dim \mathrm{Ker}L = p \quad , p \leq n \Rightarrow B_{\mathrm{Ker}L} = \{u_1, \dots, u_p\}$

$\dim \mathrm{Im}L = q \quad , q \leq \dim W \Rightarrow B_{\mathrm{Im}L} = \{w_1, \dots, w_q\}$

· Considero $w \in \mathrm{Im}L \Rightarrow \exists\, v \in V \mid L(v) = w$

· Prendo una base di V che estende $B_{\mathrm{Ker}L} \Rightarrow B_V = \{u_1, \dots, u_p, v_{p+1}, \dots v_n\}$

$\hookrightarrow v \in V$ si può scrivere come $v = a_1 u_1 + \dots + a_p u_p + a_{p+1} v_{p+1} + \dots + a_n v_n$
(combinazione lineare dei vettori B_V)

$L(v) = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_q w_q = a_1 u_1 + \dots + a_p u_p + a_{p+1} v_{p+1} + \dots + a_n v_n$

$\Rightarrow a_1 L(u_1) + \dots + a_p L(u_p) + a_{p+1} L(v_{p+1}) + \dots + a_n L(v_n) = b_1 w_1 + \dots + b_q w_q$

$L(v) = w = b_1 w_1 + \dots + b_q w_q$ sono una base dell'immagine

$\Rightarrow$ poiché ogni $w_j \in \mathrm{Im}L \ \forall j = 1, \dots, q \Rightarrow \exists\, r_j \in V \ j = 1, \dots, q \mid L(r_j) = w_j$

$\Rightarrow L(v) = b_1 L(r_1) + \dots + b_q L(r_q) = L(b_1 r_1 + \dots + b_q r_q)$ per linearità di L.

$\Rightarrow L(b_1 r_1 + \dots + b_q r_q) = L\left(b_1\left(\alpha_{i1} \sum_{i=1}^{p} u_i + \beta_{j1} \sum_{j=p+1}^{n} v_j\right) + \dots + b_q\left(\alpha_{iq} \sum_{i=1}^{p} u_i + \beta_{jq} \sum_{j=p+1}^{n} v_j\right)\right)$

(VERRÀ RIPRESO NELLA PROSSIMA LEZIONE)