21/11/17

Dato $\mathcal{U} < R^4$ con $B_{\mathcal{U}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ posto in R^4 e dato $W < R^4$ con

$B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, cerco $B_{\mathcal{U} \cap W}$.

Formo una matrice $A \in \mathcal{M}_{4\times5}$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{2R_2 - R_1 \to R_2 \\ 2R_3 + R_1 \to R_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 - R_3 \to R_3 \\ 2R_4 - R_2 \to R_4}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3]{\text{DIVIDO PER 2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{R_3 + R_4 \to R_4}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_3 + R_4 \to R_3 \\ 2R_4 + R_2 \to R_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{R_2 + R_3 \to R_2 \\ R_1 - R_3 \to R_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \text{ E } R_2]{\text{DIVIDO PER 2}} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & v \end{matrix} \end{array} \quad rg\,A = 4 \Rightarrow$$

LO SPAZIO somma $\mathcal{U} + W$ ( ) ricopre tutto R^4, ESSENDO GENERATO DA 4 VETTORI LIN. INDIP

v é combinazione lineare dei 4 vettori linearmente indipendenti: $\Rightarrow$

$v = 1e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 0e_4 \Rightarrow$ PER QUANTO ABBIAMO DIMOSTRATO SULLE COLONNE DI MATRICI EQUIVALENTI, TORNANDO AI VETTORI COLONNA DI A, ABBIAMO

$W_3 = 1u_1 + 1u_2 + 0w_1 + 0w_2$ con $B_{\mathcal{U}} = \{u_1; u_2\}$ e $B_W = \{w_1; w_2; w_3\} \Rightarrow$

$w_3 - 0w_1 - 0w_2 = 1u_1 + 1u_2 \longrightarrow$ il vettore $1u_1 + 1u_2 \in \mathcal{U} \cap W$ ed é una sua base.

C.V.D.

Supponiamo ORA DI AVERE $W = \langle\langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle\rangle$ CON LA MATRICE EQUIVALENTE RIDOTTA A FORMA CANONICA

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & v_1 & v_2 \end{matrix} \end{array} \Rightarrow$$

$v_2 = -1e_1 + 2e_2 + 3e_2 + 1e_4$

$W_4 = -1u_1 + 2u_2 + 3w_1 + 1w_2$

$W_4 - 3w_1 - 1w_2 = -1u_1 + 2u_2 \longrightarrow$ il vettore $-1u_1 + 2u_2 \in \mathcal{U} \cap W$ e pertanto i vettori $u_1 + u_2$, $-u_1 + 2u_2$ definiscono una sua base.

LE FUNZIONI: SONO RELAZIONI FRA SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$

LE APPLICAZIONI: PIU' IN GENERALE TRA INSIEMI QUALUNQUE

APPLICAZIONI TRA STRUTTURE ALGEBRICHE

Considero due strutture algebriche $(A; \square)$ e $(B; *)$.

Considero l'applicazione $f: A \to B$ che a livello insiemistico associa a elementi di A elementi di B e a livello di strutture algebriche verifica la proprietá $f(a_1 \square a_2) = f(a_1) * f(a_2)$ $\forall\ a_1, a_2 \in A$.

Tale applicazione é detta MORFISMO.

Se f é suriettiva, allora f é detta EPIMORFISMO.

Se f é iniettiva, allora f é detta MONOMORFISMO.

Se f é biettiva, allora f é detta ISOMORFISMO.

esempio:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 2x+3$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

Considero:

$f: (\mathbb{R};+) \to (\mathbb{R};\cdot)$
$x \mapsto 2x+3$

$g: (\mathbb{R};+) \to (\mathbb{R};\cdot)$
$x \mapsto x^2$

, CON $(\mathbb{R};+)$ GRUPPO ADDITIVO e $(\mathbb{R};\cdot)$ GRUPPO MOLTIPLICATIVO

f, g sono morfismi?

Devo dimostrare che:

$f(x_1+x_2) = f(x_1)\cdot f(x_2)$

$2(x_1+x_2)+3 \quad (2x_1+3)\cdot(2x_2+3)$

$2x_1+2x_2+3 \neq (2x_1+3)\cdot(2x_2+3)$

↓

non è un morfismo!

$g(x_1+x_2) = (x_1+x_2)^2$

$g(x_1)\cdot g(x_2) \neq x_1^2+x_2^2$

↓

non è un morfismo

Considero ORA:

$f: \mathbb{R}(+) \to \mathbb{R}(+)$
$x \mapsto 2x+3$

$f(x_1)+f(x_2)$

$2x_1+3+2x^2+3 \neq 2x_1+2x_2+3$

↓

non è un morfismo!

Considero V e W spazi vettoriali su un campo K.
Un'applicazione $f: V \to W$ è un morfismo se:

1) $f(v_1+v_2) = f(v_1)\cdot f(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in V$

2) $f(\alpha v) = \alpha f(v) \quad \forall\, v \in V$ e $\forall\, \alpha \in K$

I morfismi di spazi VETTOR. sono detti APPLICAZIONI LINEARI.

esempio:

1) $f: (\mathbb{R};+;\cdot\lambda) \to (\mathbb{R};+;\cdot\lambda)$
$x \mapsto 2x+3$

È un'applicazione lineare? NO, nemmeno g è lineare.

1) $f(x_1+x_2) = f(x_1)+f(x_2)$

$2x_1+2x_2+3 \neq 2x_1+3+2x_2+3$

2) $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$v \to f(v) = w$

Fisso delle basi in $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ e avrò $[v]_{B_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $[W]_{B_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$.

Ad esempio:

$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ z^2 \end{pmatrix}$

É un'applicazione lineare? NO

Verifico la linearità:

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) \overset{?}{=} f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \\ z_1+z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2+y_1+y_2 \\ (z_1+z_2)^2 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ z_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2+y_2 \\ z_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1+x_2+y_2 \\ z_1^2+z_2^2 \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE:

Un'applicazione tra spazi vettoriali espressa mediante le coordinate dei vettori del dominio é lineare se le coordinate dei vettori immagine sono date da polinomi lineari omogenei nelle coordinate dei vettori del dominio.

Data un'applicazione lineare L tra due spazi vettoriali V e W con $\dim V = n$ e $\dim W = l$, definisco il sottoinsieme di $V = \{v \in V \,/\, L(v) = 0_W\} = \ker L$ (KERNEL di o NUCLEO di L) e il sottoinsieme di W, $\operatorname{Im}(L) = \{w \in W$ per i quali $\exists\, v \in V \,/\, L(v) = w\}$; $\ker L$ e $\operatorname{Im} L$ sono sottospazi vettoriali? VEDIAMO IL $\ker L$:

1) $\underbrace{\{v \in V \,/\, L(v) = 0_W\}}_{}^{=\ker L}$ (NUCLEO DI L / KERNEL DI L): 1. $0_V \in \ker L$? sí $\xrightarrow{\text{esempio}}$ Se $L(v) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-z \\ y+4z \end{pmatrix}$ con $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow L(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x+y+z \\ 2x-z \\ y+4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 0 \\ 2x-z = 0 \\ y+4z = 0 \end{cases}$

Sí, perché il vettore nullo é sempre soluzione di un sistema lineare omogeneo.

2. Se v_1 e $v_2 \in \ker L$, allora $v_1 + v_2 \in \ker L$

$L(v_1+v_2) = L(v_1) + L(v_2)$? per la linearità di L $\Rightarrow$

$L(v_1) + L(v_2) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow L(v_1+v_2) = 0$

3. Se $v \in \ker L$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora $\alpha v \in \ker L$? CIOÈ $L(\alpha v) \overset{?}{=} 0$?

$\Rightarrow \ker L$ È SOTTOSPAZIO DI V! $\quad L(\alpha v) = \alpha L(v)$ per la linearità di $L \to \alpha L(v) = \alpha 0 = 0$

Dimostrare che $\operatorname{Im} L$ é un sottospazio di W.