Classificazione delle quadriche in $\mathbb{R}^n$: ① $\boxed{21\text{-}05\text{-}2018}$

Lavoriamo in spazi euclidei genericamente in $\mathbb{R}^n$ e in particolare in $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^3$. In $\mathbb{R}^2$ le quadriche sono le coniche.

Definizione: si dice quadrica in $\mathbb{R}^n$ il luogo dei punti le cui coordinate soddisfano un'equazione di secondo grado del tipo:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k + c = 0$$

Esempio:

In $\mathbb{R}^2$ abbiamo $a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c = 0$. Tale è l'equazione di una curva detta conica in $\mathbb{R}^2$.

L'obiettivo è dare una classificazione di tutti questi luoghi geometrici definibili come quadriche in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Una conica è una curva INDIVIDUATA da una SUPERFICIE CONICA infinita tagliata da un piano, ossia il luogo dei punti del piano che fanno parte di tale intersezione. (UNA SEZIONE PIANA)

La classificazione che daremo è di tipo affine, ossia non è fondamentale la metrica delle figure che stiamo classificando. Di tipo affine significa, ad esempio, che non conta dove giace l'eventuale centro della figura che si sta studiando, piuttosto che rispetti alcune proprietà caratteristiche di ogni classe.

Esempi in $\mathbb{R}^2$:

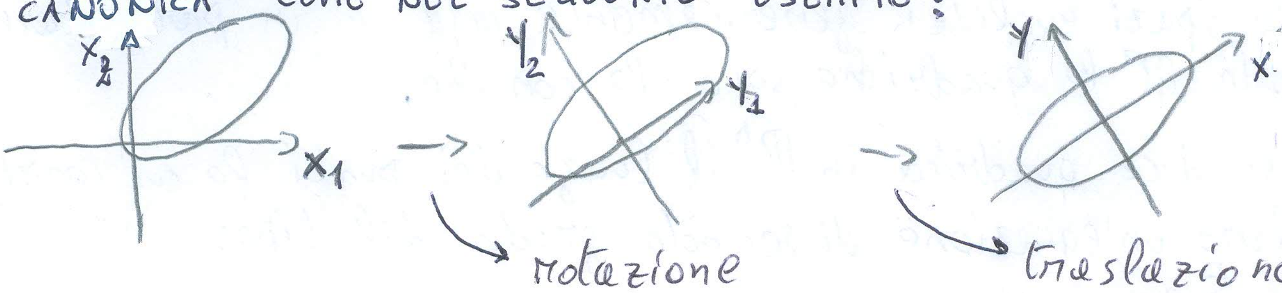
~~Se~~ Riducendo l'equazione della quadrica IRRIDUCIBILE e cambiando opportunamente le variabili si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \text{ellisse}\\ &\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \rightarrow \text{iperbole}\\ &y=x^2 \longrightarrow \text{parabola}\end{aligned}\right\} \text{TIPI DIVERSI DI CONICHE IRRIDUCIBILI}$$

AVREMO UNA DI TALI CONICHE

Nel caso si abbia una EQUAZIONE che può RICONDURSI ALGEBRICAMENTE AD UNA DI quelle elencate in $\mathbb{R}^2$; Tale metodo ALGEBRICO HA

COME CORRISPETTIVO GEOMETRICO L'OPERARE TRASFORMAZIONI ISOMETRICHE DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO FINO AD OTTENERE UNA "SITUAZIONE CANONICA" COME NEL SEGUENTE ESEMPIO:



Operando in tale modo sul sistema di riferimento, possiamo arrivare a descrivere nel sistema di riferimento FINALE la figura secondo la EQUAZIONE TIPO: IN QUESTO CASO: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.}$ (ELLISSE)

Lavoriamo in questo modo su $\mathbb{R}^n$ IN GENERALE:

$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j}_{\text{parte quadratica}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} b_k x_k}_{\text{parte lineare}} + c = 0$$

È L'EQUAZIONE DELLA QUADRICA NELLE COORDINATE INIZIALI

c → termine noto

Partiamo agendo sulla parte quadratica, che è forma quadratica, riducendola a forma canonica ad esempio passando in forma matriciale e sfruttando gli autovalori.

$$X^T A X + B^T X + c = 0$$

Data A simmetrica reale associata alla (parte) FORMA quadratica, la diagonalizzo e trovo $D = S^{-1}AS = S^TAS$ poiché S è ortogonale $\Rightarrow$ nelle nuove coordinate Y, CON $X = SY$, LA FORMA quadratica sarà data da $Y^TDY = \sum_{i=1}^{n} d_{ii}\, y_i^2$.

Possiamo innanzitutto valutare SE LA QUADRICA È DEGENERE O NO

In generale, per valutare se siano degeneri o meno non si valuta A ma un'altra matrice:

1. Costruiamo una matrice quadrata $(n+1)\times(n+1)$ associata alla quadrica.

Omogeneizziamo l'equazione aggiungendo una variabile che andrà a moltiplicare le altre. Chiamiamo tale variabile x_0: (RENDENDO L'EQUAZIONE OMOGENEA

$$\Rightarrow \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k x_0 + c x_0^2 = 0$$

Chiaramente la parte quadratica non varia essendo omogenea già in partenza. Possiamo così riscrivere l'equazione come:

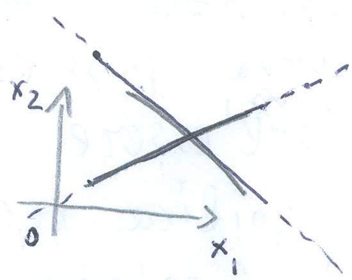
$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0 \Rightarrow \text{la matrice associata sarà } A_1 \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R})$$

La matrice A_1 è simmetrica e con questa faremo lo studio come detto prima:

- se $|A_1| = 0 \Rightarrow$ degenere, ossia la figura (geometrica) si spezza in parti, ad esempio rette (SE CONICA), ciò implica che l'equazione sarà fattorizzabile.
- se $|A| \neq 0 \Rightarrow$ non degenere. (NON SI SPEZZA)

Esempio di conica degenere:

$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0}_{\text{CONICA}} \Rightarrow \underbrace{(a_1 x + b_1 y + c_1)}_{\text{RETTA}}\underbrace{(a x + b y + c)}_{\text{RETTA}} = 0 \Rightarrow$$



Consideriamo l'equazione:

$x^2 + y^2 - 3xy - 2x + 1 = 0$

Stabiliamo se è degenere o meno, moltiplicando per x_0.

$x^2 + y^2 - 3xy - 2x x_0 + x_0^2 = 0$

$$\Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A_1| = \left(1 - \frac{9}{4}\right) - 1 = -\frac{9}{4} \neq 0 \Rightarrow \text{non degenere}$$

La distinzione tra degenere e non, è la prima grande classificazione che diamo. Adesso sappiamo certamente. CHE TALE CONICA È UNA DI QUELLE ELENCATE A PAG. 1

Procediamo ora con la diagonalizzazione della matrice $A \Rightarrow$ nelle nuove coordinate (L'EQUAZIONE DIVIENE): $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i + c_1 = 0.$

Se esiste $\beta_i \neq 0 \Rightarrow$ "riduciamo al quadrato:" IL TERMINE $\lambda_i y_i^2 + \beta_i y_i$

$$\Rightarrow \lambda_i \left(y_i + \frac{\beta_i}{2\lambda_i}\right)^2 - \frac{\beta_i^2}{4\lambda_i^2} = \lambda_i y_i^2 + \beta_i y_i \iff \lambda_i \neq 0$$

Supponiamo di riuscire a "ridurre al quadrato" ogni termine lineare $\Rightarrow$ dopo una trasformazione di coordinate, CHE È UNA traslazione, l'equazione della quadrica è del tipo:

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2 = d$ in forma canonica

Se otteniamo un'equazione del tipo scritto, la quadrica viene detta quadrica a centro.

Supponiamo ora tutti i $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow rg\, A =$ rango massimo $\Rightarrow |A| \neq 0.$

In questo caso la quadrica è non singolare. Se non fosse $\det A \neq 0$ allora sarebbe definita singolare, ossia la curva possiede punti di singolarità, che è diverso dall'essere degenere in quanto la singolarità non significa necessariamente lo spezzarsi della curva.

Analizziamo il caso dove $\det |A| \neq 0$ e $d \neq 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 = d \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{d} x_i^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\frac{d}{\alpha_i}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \dots - \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1$$

I più ed i meno sono DATI DALLA segnatura della forma quadratica e da essi dipende la classificazione della stessa. In questo caso la segnatura dà il tipo di quadrica a centro non singolare.

Supponiamo $d>0 \Rightarrow$ i tipi diversi di quadriche sono esattamente n, DEFINITI DALLE SEGNATURE: $(n,0), (n-1,1), (n-2,2), \dots, (1,n-1)$.

Nel piano abbiamo due tipi: $(2,0), (1,1)$ cioè $\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=1$ (ellisse) oppure $\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}=1$ (iperbole).

In $\mathbb{R}^3$:

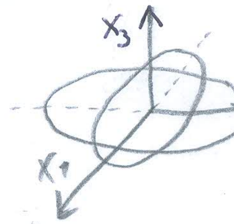
$$(3,0) \to \frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^3}{a_3^2}=1$$

$$(2,1) \to \frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$$

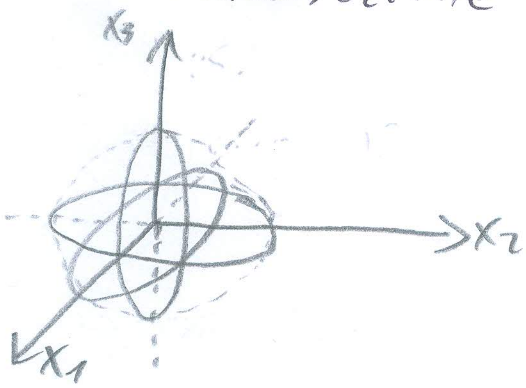
$$(1,2) \to \frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_3^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$$

Consideriamo il caso $(3,0)$: VOGLIAMO DISEGNARE LA SUPERFICIE: INTERSECHIAMOLA CON I PIANI COORDINATI E SU DI ESSI DISEGNAMO LE CURVE OTTENUTE

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1 \\ x_1=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1$$



l'intersezione data con $x_1=0$ DETERMINA un'ellisse



POI SI INTERSECA CON IL PIANO $x_2=0$, OTTENENDO UN'ALTRA ELLISSE

E CON IL PIANO $x_3=0$ CHE CI DÀ UN'ALTRA ELLISSE (VEDI IL DISEGNO A FIANCO)

POI CERCHIAMO LE INTERSEZIONI CON I PIANI PARALLELI A QUELLI COORDINATI

Ponendo AD ESEMPIO $x_3=k$; SI OTTIENE L'EQUAZIONE:

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}=\frac{a_3^2-k^2}{a_3^2}$$

$\Rightarrow$ la discussione verterà SUL PORRE $a_3^2-k^2>0$ PER DETERMINARE I VALORI DI k PER I QUALI ESISTE L'INTERSEZIONE E VALUTARNE IL TIPO.

In tale modo si otterranno varie discussioni SULLE SEZIONI DELLE superfici ellittiche in $\mathbb{R}^3$; ovviamente per ottenerle tutte bisognerà analizzare anche quando $x_1=k$ e $x_2=k$.

DISEGNAMO INFINE LA SUPERFICIE: È <u>UN'ELLISSOIDE</u>