20/09/17

GEOMETRIA (I^ PARTE) LEZIONE 2

CONSIDERIAMO UN SISTEMA Σ LINEARE DI K EQUAZIONI IN M INCOGNITE. VOGLIAMO RIDURLO E RISOLVERLO COL METODO DI GAUSS. SE NELLA PRIMA EQUAZIONE DI Σ MANCA LA PRIMA VARIABILE X_1, DOBBIAMO SCAMBIARE QUESTA EQUAZIONE CON UN' ALTRA CHE LA CONTIENE. COSÌ FACENDO CAMBIAMO IL SISTEMA CHE DIVENTA Σ_1. QUESTA "OPERAZIONE TRA LE EQUAZIONI" (LO SCAMBIO DI DUE EQUAZIONI) NON MUTA LA SOLUZIONE (COME GIÀ DIMOSTRATO) $\Rightarrow$ Σ E Σ_1 SONO EQUIVALENTI (STESSA SOLUZIONE) E QUINDI $Sol\,\Sigma = Sol\,\Sigma_1$. RITORNIAMO AL SISTEMA DELLA PRECEDENTE LEZIONE:

$$\Sigma_4 \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 - X_3 = 1 \\ 7X_2 - X_3 = 3 \\ 6X_3 = -32 \end{cases} \Rightarrow \text{RANGO } \Sigma_1 = 3 \ (RG\,\Sigma_1 = 3)$$

AMMESSO CHE Σ_1 ABBIA SOLUZIONE, ORA SAPPIAMO CHE TALI SOLUZIONI SONO ESATTAMENTE $\infty^{\#\text{VARIABILI} - RG\,\Sigma_1}$. NEL NOSTRO CASO $\infty^{3-3} = \infty^0 = 1 =$ $= 1$ SOLUZIONE. NEL CASO DI ∞^1 HO INFINITE SOLUZIONI, CIOÈ UNA RETTA INTERA DI SOLUZIONI. SE ∞^2 LE SOLUZIONI SONO TUTTI I PUNTI DI UN PIANO, etc... VOGLIAMO ORA CONOSCERE LE SOLUZIONI RIPRENDENDO IL METODO DI GAUSS (STAVOLTA IN ASCESA): CONSIDERIAMO LA PRIMA VARIABILE (QUELLA DEL PIVOT) PRESENTE NELL' ULTIMA EQUAZIONE IN Σ_4, X_3. FACCIO $6\,\text{II Eq} + \text{III Eq} \xrightarrow{\text{II Eq}} 42X_2 - \cancel{6X_3} + \cancel{6X_3} = 18 - 32$ $\Rightarrow 42X_2 = -14$.

$$\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_5 \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 - X_3 = 1 \\ \cancel{42}^{21}X_2 = -\cancel{14}^{7} \\ \cancel{6}^{3}X_3 = -\cancel{32}^{16} \end{cases} \text{(HO SEMPLIFICATO) E CAMBIO IN } \Sigma_6$$

ORA DOBBIAMO ELIMINARE X_3 DALLA I^ EQUAZIONE $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 3\,\text{I Eq} + \text{III Eq} \xrightarrow{\text{I Eq}} 6X_1 + 9X_2 - \cancel{3X_3} + \cancel{3X_3} = 3 - 16 \Rightarrow 6X_1 + 9X_2 = -13$$

$$\Rightarrow \Sigma_7 \begin{cases} 6X_1 + 9X_2 = -13 \\ 21X_2 = -7 \\ 3X_3 = -16 \end{cases}$$

ORA FACCIAMO $I\,Eq - 3\,II\,Eq \to I\,Eq$

$$6x_1 + \cancel{9x_2} - \cancel{9x_2} = -10 \Rightarrow \cancel{6}_3 x_1 = -\cancel{10}_5$$

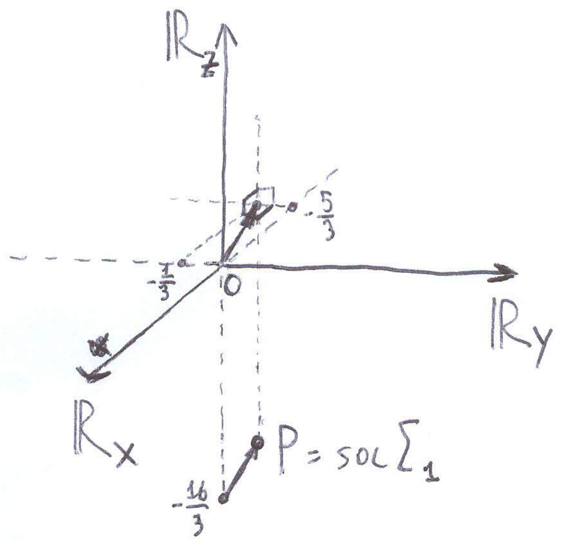
~~$3x_1$~~

$$\Sigma_8 \begin{cases} 3x_1 = -5 \\ 21x_2 = -7 \\ 3x_3 = -16 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} \frac{I\,Eq}{3} \to I\,Eq \\ \frac{II\,Eq}{21} \to II\,Eq \\ \frac{III\,Eq}{3} \to III\,Eq \end{array}$$

$$\Sigma_9 \begin{cases} x_1 = -\frac{5}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \text{SOL}\,\Sigma_1 = \left\{\left(-\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{16}{3}\right)\right\}.$$

VOGLIAMO ORA RAPPRESENTARE GEOMETRICAMENTE $\text{Sol}\,\Sigma_1$:
GEOMETRICAMENTE LA SOLUZIONE DEL SISTEMA RAPPRESENTA UN PUNTO NELLO SPAZIO CARTESIANO $\mathbb{R}_3$.



$\mathbb{R}_x \to$ ASCISSE

$\mathbb{R}_y \to$ ORDINATE

$\mathbb{R}_z \to$ QUOTA

TORNIAMO AD UN SISTEMA GENERICO Σ, LINEARE DI K EQUAZIONI ED n INCOG.

$$\Sigma : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{km}x_m = b_k \end{cases}$$

SCRIVO LA MATRICE CON LA "STESSA IMPOSTAZIONE GRAFICA DI Σ" CIOE' METTIAMO NELLE RIGHE I COEFFICIENTI DELLE VARIABILI (ORDINATE) DI OGNI EQUAZIONE COSÌ NELLE COLONNE RISULTANO I COEFFICIENTI DELLE SINGOLE VARIABILI E I TERMINI NOTI.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2m} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{km} & b_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{k\times(m+1)}(\mathbb{R})$$

$\mathcal{M}_{k\times(m+1)}(\mathbb{R})$ = INSIEME DELLE MATRICI CON K RIGHE ED (M+1)-COLONNE CON ENTRATE REALI

COME ESEMPIO RIPRENDIAMO IL SISTEMA

$$\Sigma_1 \begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=1 \\ -3x_1-x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2-x_3=3 \end{cases} \rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

"A" È UNA MATRICE 3×4, PER QUESTO MOTIVO DETTA $\overbrace{\text{"RETTANGOLARE"}}^{(\#\text{RIGHE} \neq \#\text{COLONNE})}$

CAMBIAMO LE RIGHE DI QUESTA MATRICE MEDIANTE LE OPERAZIONI EFFETTUATE SULLE EQUAZIONI DEL SISTEMA:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{R_1-2R_3\rightarrow R_3}{\overset{3R_1+2R_2\rightarrow R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$\sim$ (SI LEGGE EQUIVALENTI)

LE OPERAZIONI FATTE CON LE RIGHE DELLA MATRICE RIENTRANO TRA LE COSIDDETTE

OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA:
1. MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE DI TUTTA UNA RIGA
2. SOSTITUZIONE DI UNA RIGA CON UNA COMBINAZIONE LINEARE DELLA STESSA RIGA CON UN'ALTRA RIGA
3. SCAMBIO DI RIGHE.

(NOTA: LE STESSE OPERAZIONI POSSO FARLE ANCHE ALLE COLONNE DI UNA MATRICE, MA A QUESTO NON SIAMO INTERESSATI PER LA TEORIA CHE AFFRONTEREMO)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \underset{R_2+7R_3\rightarrow R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -32 \end{pmatrix}$$

RANGO = 3 (PERCHÉ HO 3 PIVOT)

SEMPLIFICO DIVIDENDO PER 2

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -16 \end{pmatrix} \sim \underset{3R_1+R_3\rightarrow R_1}{\overset{3R_2+R_3\rightarrow R_2}{}} \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 & -13 \\ 0 & 21 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -16 \end{pmatrix}$$

SEMPLIFICO PER 7 $\sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 6 & 9 & 0 & -13 \\ 0 & 3 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -16 \end{pmatrix} \underset{\sim}{R_1 - 3R_2 \rightarrow R_1} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -16 \end{pmatrix} \begin{matrix} \frac{R_1}{6} \rightarrow R_1 \\ \frac{R_2}{3} \rightarrow R_2 \\ \frac{R_3}{3} \rightarrow R_3 \end{matrix} \sim$$

CONTINUO CON IL METODO FINO A TROVARE LA FORMA CANONICA A GRADINI (HO GLI ZERI SIA SOPRA CHE SOTTO I PIVOT E I PIVOT UGUALI A +1)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{16}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow$$ ORA RIASSOCIO UN SISTEMA LINEARE

E HO IN EVIDENZA GIÀ LA SOLUZIONE

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{3} \\ x_2 = -\frac{1}{3} \\ x_3 = -\frac{16}{3} \end{cases}$$

DEFINIZIONE: LE MATRICI OTTENUTE MEDIANTE SUCCESSIVE OPERAZIONI ELEMENTARI RIGA SONO DETTE EQUIVALENTI

OSSERVAZIONE: POICHÈ IL RANGO DI UNA MATRICE È DEFINITO COME IL NUMERO DI PIVOT DELLA SUA FORMA RIDOTTA A GRADINI, NE DEDUCIAMO CHE MATRICI EQUIVALENTI HANNO LO STESSO RANGO