19\03\2018

"Avendo lavorato fino ad ora in $\mathbb{R}$, generalizziamo prendendo un campo generico"

Sia $\mathbb{K}$ un campo

DEFINIZIONE: $\mathbb{K}$ è detto di caratteristica p, $p \in \mathbb{N}$ primo, se ~~esiste~~ per ogni elemento x del campo $\exists p \in \mathbb{N}$ tale che $px = 0$

(0: elem. neutro dell'addizione)

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ sono di caratteristica 0

I campi finiti (# finito di elementi) possono essere di caratteristica $p \neq 0$.

Esempio: $\mathbb{Z}_2$ è un campo $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ "0 pari, 1 dispari"

(rappresentanti delle 2 classi di equivalenza)

Tabella per definire l'operazione

$\mathbb{Z}_2$:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$\mathbb{Z}_2$ è un campo di caratteristica 2

In $\mathbb{Z}_2$ non posso dividere per 2! Dato che 2 appartiene alla classe di equivalenza di 0.

Considero una $M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{in } \mathbb{R} \text{ è invertibile (det} \neq 0\text{), ma in } \mathbb{Z}_2 \text{ no!}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ perché $-1 \in$ alla classe di equivalenza di 1

DEFINIZIONE: Sia $F: V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica; due vettori $v, w \in V$ sono detti F-coniugati o F-ortogonali $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $F((v,w)) = 0$

OSSERVAZIONE: se $v = 0$ e/o $w = 0 \Rightarrow F((v,w)) = 0$ quindi cerchiamo vettori F-ortogonali non nulli

se $v_1, \dots, v_n$ sono F-coniugati al vettore $w \Rightarrow$ ogni combinazione lineare $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ è F-coniugato a w

(da fare)

DEFINIZIONE: Dato $v \in V \Rightarrow$ chiamiamo COMPLEMENTO ORTOGONALE di v l'insieme di tutti i vettori F-coniugati di v, cioè $\{w \in V \mid F((w,v)) = 0\}$, Tale insieme si indica con $v^{\perp}$

OSSERVAZIONE: $v^{\perp} = \langle\langle v \rangle\rangle^{\perp} = \{w \in V \mid F((w, \alpha v)) = 0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$
(per la definizione di bilinearità di F) (da dimostrare)

DEFINIZIONE: Sia U un sottospazio di $V \Rightarrow$ definiamo $U^{\perp}$
$U^{\perp} = \{v \in V \mid F((v,u)) = 0 \ \forall u \in U\}$ (DA DIMOSTRARE)

OSSERVAZIONE: $U^{\perp}$ è un sottospazio di V

Esempio: $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (il codominio è $\mathbb{R}$, dunque F è forma)

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_1$$

1) F è bilineare simmetrica
2) determinare $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}^{\perp}$

1) $F((\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w)) = \alpha_1 F((v_1, w)) + \alpha_2 F((v_2, w))$
e $F((v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2)) = \beta_1 F((w_1, v)) + \beta_2 F((w_2, v))$ (da fare)
$\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ e $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$

Bilinearità: polinomio lineare omogeneo nelle due variabili

Simmetria: $F((v,w)) = F((w,v)) \ \forall v, w \in V$ $\quad v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = F\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$$
$$x_1 y_2 + x_2 y_1 \qquad y_1 x_2 + y_2 x_1$$

In $\mathbb{R}$ vale la proprietà commutativa per la somma e il prodotto

Costruisco $[F]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} F((e_1,e_1)) & F((e_1,e_2)) \\ F((e_2,e_1)) & F((e_2,e_2)) \end{pmatrix}$ e_1, e_2 vettori della base canonica $\mathcal{E}$ in $\mathbb{R}_2$ $\Rightarrow$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

se cambiamo base, la matrice sarà sempre simmetrica! (relazione di congruenza)

2) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}^{\perp} = \left\{v \in \mathbb{R}^2 \mid F\left(\left(v, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right)\right) = F\left(\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, v\right)\right) = 0\right\}$ pongo $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

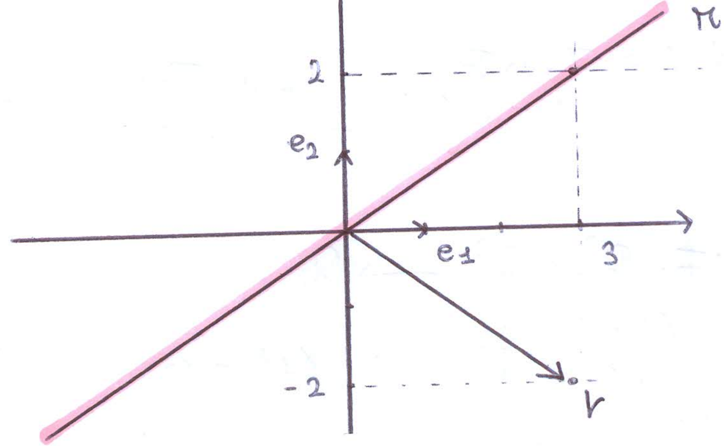
calcolo $F\left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right)\right) = -2x_1 + 3x_2 = 0$
Eq. retta nel piano

Tutti i suoi VETTORI sono F-ortogonali a v

Rappresentiamo la retta ottenuta:

$\pi: -2x_1 + 3x_2 = 0$

$x_2 = \frac{2}{3}$



Se il vettore dato è il vettore nullo il sottospazio trovato è lo spazio stesso

DEFINIZIONE: Una base B_V è detta F-ortogonale se posta $B_V = \{v_1, .., v_n\}$

$\Rightarrow F((v_i, v_j)) = 0 \quad \forall i \neq j$

Una base B_V è detta F-ortonormale se è F-ortogonale e

$F((v_j, v_j)) = 1 \quad \forall j$

OSSERVAZIONE: 1) Se B_V è una base F-ortogonale, com'è fatta $[F]_{B_V}$?

2) Se B_V è una base F-ortonormale, com'è fatta $[F]_{B_V}$?

1). È una matrice DIAGONALE! 2). È la matrice IDENTITÀ!

DEFINIZIONE: Una forma bilineare F qualunque è detta non DEGENERE se $[F]_B$ ha rango massimo qualunque sia B

Una forma bilineare F qualunque è detta DEGENERE se $[F]_B$ non ha rango massimo

OSSERVAZIONE: data una base ortonormale di V, $\underset{B_{\perp n}}{B_V}$, e F forma bil. simmetrica

$$\Rightarrow [F]_{B_{\perp n}} = I \Rightarrow F\left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T [F]_{B_{\perp n}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1, .. x_n)\, I \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1, .. x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + .. + x_n y_n$$

è detto PRODOTTO SCALARE STANDARD

DEFINIZIONE: Data $F: V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica, un vettore $v \in V$ è detto F-isotropo se $v \neq 0$ e $F((v,v)) = 0$

(2) Data F forma bil. simmetrica e $W < V \Rightarrow$ diciamo che W è F-ISOTROPO se $W \subseteq W^{\perp}$ e $F|_{W \times W} \equiv 0$

gli elementi su cui agisce sono ristretti al nuovo codominio $W \times W$

↓

$W < V$ è F-isotropo se ogni vettore di W è F-isotropo

[dimostrare ②]

Sia $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1 y_2 + x_2 y_1$ $\qquad \exists$ vettori F-isotropi non nulli?

Cerco $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid F((v,v)) = 0 \Rightarrow F\left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)\right) = x_1 x_2 + x_2 x_1 = 2x_1 x_2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0$ Tutti i vettori con prima coordinata nulla e tutti i vettori con seconda coordinata nulla sono F-isotropi

Esercizio: dimostrare che due vettori F-coniugati, non F-isotropi, non nulli, sono linearmente indipendenti

__PROPOSIZIONE__: Sia $F: V \times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica, $U < V$ h-dimensionale, privo di vettori F-isotropi, $\dim V = n$

$\Rightarrow U^\perp = \{v \in V \mid F((v,u)) = 0 \ \forall u \in U\}$ è un sottospazio di V, $(n-h)$-dimensionale e $U \oplus U^\perp = V$

($U^\perp$ è il COMPLEMENTO ORTOGONALE di U)

__Dimostrazione__: fisso $B_U = \{u_1, \dots, u_h\}$ base di U e $B_V = \{v_1, \dots v_n\}$ base di V

Per determinare $U^\perp$ è sufficiente determinare l'insieme dei vettori di V F-ortogonali ai vettori di base di U. Infatti cerco $v \mid F((v,u)) = 0 \ \forall u \in U$:

sia $u = \sum_{j=1}^{h} \alpha_j u_j \Rightarrow F((v,u)) = F\left(\left(v, \sum_{j=1}^{h} \alpha_j u_j\right)\right) = \sum_{j=1}^{h} \alpha_j F((v,u_j))$

[per la bilinearità di F]

Pertanto cerco i $v \in V \mid \Sigma_0: \begin{cases} F((v,u_1)) = 0 \\ F((v,u_2)) = 0 \\ \vdots \\ F((v,u_h)) = 0 \end{cases}$ pongo $v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ e vado a sostituirlo nel sistema $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} F\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, u_1\right)\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i F((v_i, u_1)) = 0 \\ \vdots \\ F\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, u_h\right)\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{F((v_i, u_h))}_{\text{coefficienti}} = 0 \end{cases}$$

sistema lineare di h equazioni in n incognite (x_i)

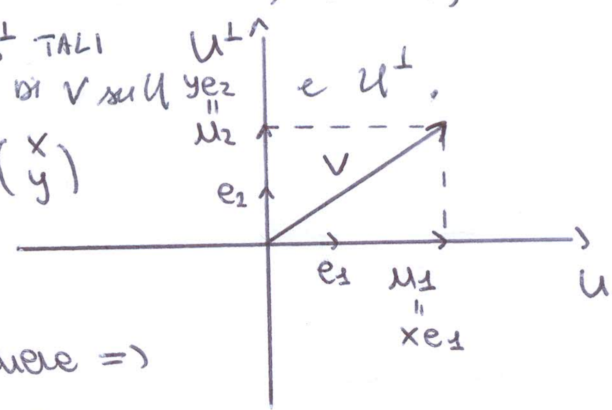
⇓

ho trovato un sistema lineare omogeneo di h equazioni (* non ci sono vettori isotropi)
in n incognite con $h \leq n$. Si verifica (per esercizio)* che il
rango di tale sistema è $\underline{h}$ (le equazioni del sistema sono lin. indipendenti)
$\Rightarrow$ lo spazio delle soluzioni è un sottospazio vettoriale di dimensione $\boxed{n-h}$
dunque essendo $Sol\,\Sigma_0 = U^\perp$, $U^\perp$ è sottospazio vettoriale di dim. $n-h$

Rimane da dimostrare che $U \oplus U^\perp = V$
cioè cerco $U \cap U^\perp$ e dimostro che $U \cap U^\perp = 0$ (somma diretta)

$\rightarrow$ sia $u \in U \cap U^\perp \Rightarrow F((u,u)) = 0$ ma per ipotesi non ci sono in U vettori F-isotropi non nulli! Dunque dimostrato!

$\boxed{U \oplus U^\perp = V}$ posso esprimere un qualunque vettore v come combinazione lineare di due vettori, u_1 e u_2, $u_1 \in U$ e $u_2 \in U^\perp$ TALI VETTORI SONO DETTI PROIEZIONE ORTOGONALE DI V su U e $U^\perp$.



$$v = u_1 + u_2 = xe_1 + ye_2 = x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

<u>**PROPOSIZIONE**</u>: 1) Sia $F: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
forma bilineare simmetrica degenere $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ F ha vettori F-isotropi (sempre)
2) Sia $F: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
forma bilineare simmetrica non degenere $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ F potrebbe avere vettori F-isotropi

|| Esempio: $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
$$\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right) \mapsto x_1y_2 + x_2y_1 \Rightarrow [F]_e = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ e_1 ed e_2 sono F-isotropi: $\begin{pmatrix} F((e_1,e_1))=0 & 1 \\ 1 & F((e_2,e_2))=0\end{pmatrix}$

<u>PROPOSIZIONE</u>
Sia $F: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica e non nulla qualunque
$\Rightarrow$ F ha almeno un vettore non isotropo

dimostrazione: siano $v, w \in V \mid F((v,w)) \neq 0 \Rightarrow F((v+w, v+w)) =$
$= F((v,v)) + F((v,w)) + F((w,v)) + F((w,w))$ essendo simmetrica, $F((v,w)) = F((w,v)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow F((v,v)) + 2F((v,w)) + F((w,w)) = F((v+w, v+w))$$

dunque $\underset{\neq 0}{F((v,w))} = \dfrac{F((v+w, v+w)) - F((v,v)) - F((w,w))}{2}$

Posso dividere per due perchè ho una caratteristica $p \neq 2$

$\Rightarrow$ Almeno una fra v, w e $v+w$ è non ISOTROPO

(altrimenti $F((v,w)) = 0$!)

c.v.d