VOGLIAMO RAPPRESENTARE LE SOLUZIONI DI UN SISTEMA LINEARE IN UNO SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^2$ ($o\ \mathbb{R}^3$)

PRENDIAMO UN SISTEMA LINEARE OMOGENEO; ESSO HA SEMPRE SOLUZIONE: LA NULLA ESISTE SEMPRE!

$$\Sigma_0 \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

SISTEMA OMOGENEO (T. NOTI NULLI)

RISCRIVIAMO IL SISTEMA SOTTO FORMA MATRICIALE $(A \cdot X = B)$ CON: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{2\times 1}$

ELEMENTO DI UNO SPAZIO VETTORIALE $\mathbb{R}^2$ (VETTORE COLONNA)

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ VETTORE NULLO

$\Downarrow$

$$A \cdot X = 0$$

$$\Sigma_0 : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

PRENDIAMO LA MATRICE DEI COEFF. E LA RIDUCIAMO A GRADINI CON IL METODO DI GAUSS.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{R_1 - R_2 \to R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad rg(A) = 2 \quad \Rightarrow rg\,\Sigma_0 = 2$$

Σ_0 HA $\infty^{2-2} = \infty^0 = \boxed{1}$ SOLUZIONI.

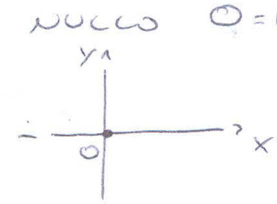
IN MODO ANALOGO, CON IL METODO DEI MINORI, OTTENIAMO LO STESSO RANGO.

$$\det(A) = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow rg(A) = 2 \rightarrow \Sigma_0 \text{ HA } 1 \text{ SOLUZIONE CHE}$$

QUINDI SARÀ (0,0), CHE SAPEVAMO GIÀ ESSERCI

IL <u>SISTEMA DI CRAMER</u> È UN SISTEMA CON n-EQUAZIONI, n-INCOGNITE E RANGO n. $\Rightarrow$ IL NOSTRO SISTEMA È UN SISTEMA DI CRAMER.

$\exists$ UN'UNICA SOLUZIONE DI Σ_0 CIOÈ IL VETTORE NULLO $0 = (0,0)$



ORA PASSIAMO AD UN'ALTRO SISTEMA LINEARE,

$$\Sigma_0 : \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

ESTRAGGO LA MATRICE DEI COEFF. (A), LA MATRICE DELLE INCOGNITE (X), E QUELLA DEI TERMINI NOTI (B).

IL SISTEMA SCRITTO SOTTO FORMA MATRICIALE È

$$\Sigma_0 : \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

METODO DI ELIMINAZIONE DI GAUSS.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{2R_1 - R_2 \rightsquigarrow R_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rg(A) = 1 \quad \Rightarrow rg\,\Sigma_0 = 1$$

$\boxed{N.B.}$ IL RANGO MASSIMO $\overbrace{\ }^{\text{POSSIBILE}}$ DI A È 2, GUARDO I MINORI NON NULLI DI ORDINE MAX SONO DI ORDINE 2 ; IN QUESTO CASO $\det A$, È $= 0 \Rightarrow rg(A) = 1$.

$$\Sigma_0 \text{ HA } \infty^{2-1} = \boxed{\infty^{1}} \text{ SOLUZIONI}$$

N. PARAMETRI

$(A \vdots 0)$ $\shortparallel$

A QUESTO PUNTO PRENDO IL SISTEMA ASSOCIATO AD $(A \vdots B)$

[~~NON LA MATRICE COMPLETA~~ ABBIAMO CONSIDERATO NEI CONTI $(A \vdots 0)$ POICHÈ AVENDO $\overbrace{\ }^{B}$ VALORI NULLI NON CAMBIERANNO VALORE DURANTE LE OPERAZIONI MA, SE B NON FOSSE NULLO, ANDREBBE CONSIDERATO. DURANTE LA RIDUZIONE A GRADINI DI GAUSS.]

$\Rightarrow \boxed{x + y = 0}$ SISTEMA ASSOCIATO AD $(A \vdots 0)$

$\boxed{N.B.}$ IL SISTEMA ASSOCIATO È EQUIVALENTE AL SISTEMA Σ_0 SOPRACITATO.

$$\left[A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

IN Σ_0 SAPPIAMO CHE UNA VARIABILE SARÀ LIBERA (O INDIPENDENTE) E L'ALTRA LEGATA (O DIPENDENTE)

CONSIDERO UNA ~~INCOGNITA~~ VARIABILE E LA PONGO IN RELAZIONE DEL L'ALTRA.

$$\Rightarrow \quad y = -x$$

VARIABILE LEGATA — VARIABILE ~~[illegible]~~ LIBERA

IL RANGO DEL SISTEMA Σ_0 CI DICE IL NUMERO DI VARIABILI ~~[illegible]~~ LEGATE

MENTRE IL NUMERO : # VARIABILI $- rg\,\Sigma_0$ COINCIDE CON IL NUMERO DI VARIABILI LIBERE (CIOÈ IL # DI ~~VARIABILI~~ PARAMETRI)

TROVIAMO LE SOLUZIONI FONDAMENTALI DEL SISTEMA

$\boxed{y = -x}$

(*)

y	x
-1	1

$\Rightarrow v = (1,-1)$

IL VETTORE v È SOL. FONDAMENTALE DEL NOSTRO SISTEMA

N.B. ALLA DESTRA VANNO MESSE LE VARIABILI LIBERE E, A SINISTRA LE VARIABILI LEGATE, SEPARATE DA UNA DOPPIA BARRA (IN GENERALE HO PIÙ VARIABILI LEGATE E LIBERE)

ES.

y	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_p
	1	0	0	$\dots$	0
	0	1	0	$\dots$	0
	0	0	1	$\dots$	0
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	0	0	0	$\dots$	1

SONO VETTORI DI $\mathbb{R}^n$

TUTTE LE ALTRE SOLUZIONI ~~SONO~~ DI UN SISTEMA LINEARE SONO COMBINAZIONI LINEARI DELLE SOLUZIONI FONDAMENTALI, CIOÈ SE $v_1, v_2, v_3, \dots v_q$ SONO LE SOL. FONDAMENTALI (CON q = # PARAMETRI = # VARIABILI $- rg\, \Sigma_0$) $\Rightarrow$ UNA LORO COMBINAZIONE LINEARE È

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_q v_q \quad \forall\, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_q \in \mathbb{R}. \qquad \sum_{q=1}^{N} \alpha_q v_q$$

SARÀ UN VET. DI $\mathbb{R}^n$

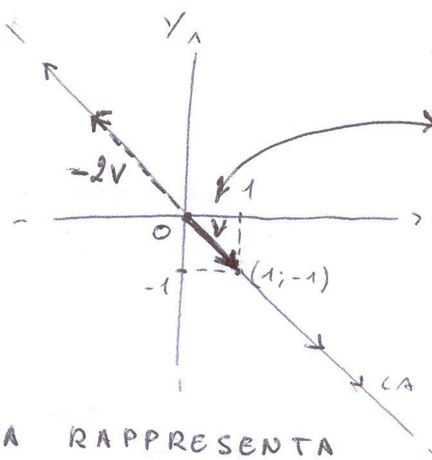
VET. DI $\mathbb{R}^n$

NEL NOSTRO CASO (*) LE COMBINAZIONI LINEARI SARANNO VETTORI $X = \alpha v$, CIOÈ I MULTIPLI DI v, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$

$$\Sigma_0 : \{X=(x,y) \mid X = \alpha v \ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$$

SOLUZIONI DEL NOSTRO SISTEMA

LE NOSTRE SOLUZIONI DI Σ_0, FORMANO UNA RETTA IN $\mathbb{R}^2$ PASSANTE PER L'ORIGINE.



RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DI $v = (1;-1)$

LA RETTA È IL NOSTRO SPAZIO DELLE SOLUZIONI, CIOÈ TUTTI I VETTORI MULTIPLI DI v.

ESSA RAPPRESENTA

PRENDIAMO UN NUOVO SISTEMA Σ_0,

$$\Sigma_0 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$ SISTEMA LINEARE

QUINDI,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times 1} \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{2\times 1}$$

DA CUI RICAVO LA FORMA MATRICIALE $AX = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad rg(A) = 2 \Rightarrow rg(\Sigma_0) = 2 =$$

$= \#$ VARIABILI LEGATE

VARIABILI LIBERE

$$\Sigma_0 \text{ HA } \infty^{3-2} = \boxed{\infty^{1}} \text{ SOLUZIONI}$$

VARIABILI LEGATE

$$\begin{cases} y = -x \\ x - x + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}$$

y, z SONO LE VAR. LEGATE.

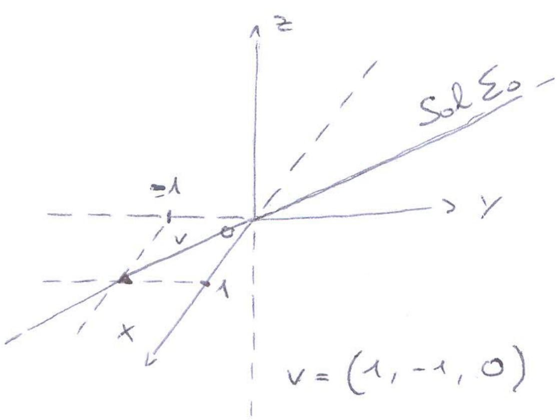
x SARÀ LA VAR. LIBERA.

y	z	x
-1	0	1

LA TERNA DEFINISCE IL VETTORE $v = (+1, -1, 0)$ CHE È SOLUZ. FONDAM.

$$\Rightarrow Sol\,\Sigma_0 : \{ X = (x, y, z) \mid X = \alpha v \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \}$$

RAPPRESENTO LE SOLUZIONI GEOMETRICAMENTE.



$$X = \alpha v$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$: EQ. VETTORIALE DI $Sol\,\Sigma_0$; PONGO $t = \alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ PASSIAMO AL SISTEMA SCALARE

L'EQUAZIONE VETTORIALE CI DA L'<u>EQUAZIONE</u> <u>PARAMETRICA</u>.

$$\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

$\boxed{N.B.}$ GIA' DAL SISTEMA INIZIALE POSSO RICAVARE L'EQ. PARAMETRICA.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t - t + z = 0 \\ y = -t \\ x = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 0 \end{cases}$$

PONGO $\to x = t$ DA CUI

EQUAZIONE PARAMETRICA

<u>PRENDIAMO UN'ALTRO ESEMPIO.</u>

$\Sigma_0 : x + y + z = 0$ (EQ. CARTESIANA DI UN PIANO IN $\mathbb{R}^3$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{1\times 3} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{3\times 1} \qquad 0 = (0)_{1\times 1}$$

$$AX = 0$$

IL RANGO DI A SARA' 1. $\quad rg(A) = rg\,\Sigma_0 = 1 = \#$ VAR. LEGATE

$\Rightarrow Sol\,\Sigma_0 \quad \infty^{3-1} = \boxed{\infty^{2}}$ SOLUZIONI

VAR. LEGATE

\# VAR. LIBERE

QUINDI,

$$\boxed{x = -y - z}$$

LE SOLUZIONI FONDAMENTALI SONO,

x	y	z
-1	1	0
-1	0	1

$v_1 = (-1, 1, 0)$ e $v_2 = (-1, 0, 1)$

SOLUZIONI FONDAMENTALI

$$Sol\,\Sigma_0 = \{ X = (x, y, z) \mid X = s v_1 + t v_2 \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \}$$

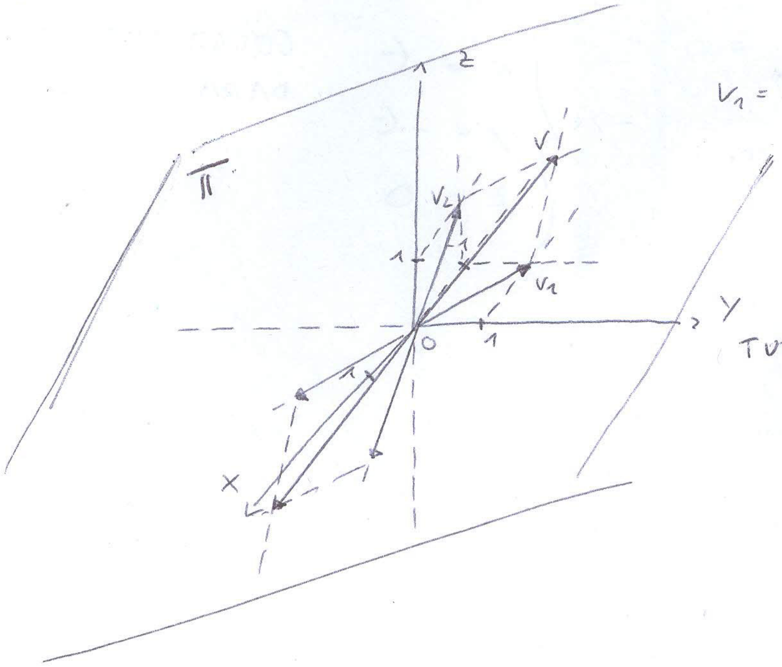
LA NOSTRA SOLUZIONE VETTORIALE SARÀ,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = -s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases}$$

EQ. VETTORIALE

EQ. PARAMETRICA

RAPP. GEOMETRICAMENTE IN $\mathbb{R}^3$



$V_1 = (-1, 1, 0)$, $V_2 = (-1, 0, 1)$

LO SPAZIO DELLE SOLUZIONI È IL PIANO π SU CUI GIACCIONO TUTTI I VETTORI SOMMA (v).

$$v = s v_1 + t v_2 \,, \forall s, t \in \mathbb{R}$$