GEOMETRIA 16/05/2018 (1)

OPERATORI SIMMETRICI

DEF: UN OPERATORE $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ É DETTO SIMMETRICO SE IL SUO OPERATORE AGGIUNTO T^* É T, CIOÉ SE $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ $T(u) \cdot v = u \cdot T(v)$

FISSIAMO UNA BASE ORTONORMALE $\mathbb{B}_{\perp n}$ IN $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ PONGO $A = [T]_{B\perp n}$ DATI $u, v \in \mathbb{R}^n$ SIANO $[u]_{B\perp n} = X$, $[v]_{B\perp n} = Y$

$$[T(u)]_{B\perp n} = [T]_{B\perp n} [u]_{B\perp n} = AX \quad \text{E}$$

$$[T(v)]_{B\perp n} = [T]_{B\perp n} [v]_{B\perp n} = AY \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [T(u)]^T_{B\perp n} \cdot [\cdot]_{B\perp n} \cdot [v] = (AX)^T \cdot I \cdot Y =$$

$$= X^T A^T Y = X^T \cdot I \cdot AY = X^T AY \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow \boxed{A^T = A} \Rightarrow$ LA MATRICE ASSOCIATA A T IN $B_{\perp n}$ É <u>SIMMETRICA</u>

PROPRIETÀ: SE V È SOTTOSPAZIO INVARIANTE PER $T \Rightarrow V^\perp$ È INVARIANTE PER T

DIM: SE $w \in V^\perp \Rightarrow T(w) \in V^\perp \ \forall w \in V^\perp$

$\Rightarrow$ PRESI u, w SU $\mathbb{R}^n$, CON $u \in V$ E $w \in V^\perp$

$\Rightarrow T(u) \cdot w = u \cdot T(w)$ ESSENDO T SIMMETRICO;

POICHÉ

$T(u) \cdot w = 0 \Rightarrow u \cdot T(w) = 0 \Rightarrow T(w) \in V^\perp$

2) AUTOVETTORI RELATIVI AD AUTOVALORI DIVERSI SONO ORTOGONALI

DIM SIANO λ_1, λ_2 AUTOVALORI DI T CON $\lambda_1 \neq \lambda_2$ E V_1, V_2 AUTOVETTORI $| \ T(V_1) = \lambda_1 V_1$ E $T(V_2) = \lambda_2 V_2 \Rightarrow$ SO CHE $T(V_1) \cdot V_2 = V_1 \cdot T(V_2)$

CIOÈ $(\lambda_1 V_1) \cdot V_2 = V_1 \cdot (\lambda_2 V_2) \Rightarrow \lambda_1 (V_1 \cdot V_2) - \lambda_2 (V_1 \cdot V_2) = 0$

$\Rightarrow (V_1 \cdot V_2)(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$

$V_1, V_2 \neq 0$ PERCHÉ V_1 E V_2 SONO AUTOVETTORI E QUINDI NON NULLI $\Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ MA PER IPOTESI $\lambda_1 \neq \lambda_2$, QUINDI $V_1 \cdot V_2 = 0$

$\Rightarrow V_1 \perp V_2$

SI RICORDA CHE LE MATRICI SIMMETRICHE REALI HANNO <u>SOLO</u> RADICI CARATTERISTICHE REALI PERTANTO UN OPERATORE SIMMETRICO HA SOLO AUTOVALORI REALI.

OSSERVAZIONE:

SE UN OPERATORE NON È SIMMETRICO O ISOMETRICO, AUTOVETTORI RELATIVI AD AUTOVALORI DIVERSI NON SONO SEMPRE $\perp$.

ES: IN $\mathbb{R}^2$ CON LA BASE CANONICA CONSIDERO $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ASSOCIATO ALLA MATRICE $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2x = y \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow y = -x \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow v \cdot u \neq 0 \Rightarrow$ NON SONO $\perp$

TEOREMA DI STRUTTURA PER OPERATORI SIMMETRICI:

DATO $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ SIMMETRICO $\Rightarrow \exists\ B_{\perp n}$ ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^n$ t.c. $[T]_{B_{\perp n}} = D =$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(QUINDI OGNI MATRICE SIMMETRICA REALE È ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILE)

DIM: PER INDUZIONE SU $n = \dim \mathbb{R}^n$

1) VERIFICA PER $n=1$ $\quad T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \alpha x \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$[T]_C = (\alpha)$ DIAGONALE

2) CASO $n=2 \Rightarrow [T]_C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

CERCO GLI AUTOVALORI $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c \end{vmatrix} = 0$

$(a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda(a+c) + ac - b^2 = 0$

$$\lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4ac + 4b^2}}{2} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$

$(a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$ SEMPRE $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

SE $(a-c)^2+4b^2>0 \Rightarrow \exists\ \lambda_1, \lambda_2$

CON $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow T$ É DIAGONALIZZABILE PERCHÉ

MOLTEPLICITÀ ALGEBRICHE E GEOMETRICHE

COINCIDONO. (E SONO UGUALI AD 1)

SE $(a-c)^2+4b^2=0 \iff \begin{cases} a-c=0 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=0 \end{cases}$

$\Rightarrow [T]_e = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ É GIÀ <u>DIAGONALE</u>

3) SUPPONIAMO VERIFICATO IL TH FINO A $\dim = n-1$ E DIMOSTRIAMOLO PER $\dim = n$, CIOÈ $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ SIMMETRICO

SIA λ_0 AUTOVALORE DI T E v_0 SUO AUTOVETTORE $\Rightarrow V = \langle\langle v_0 \rangle\rangle$ È SOTTOSP. INVARIANTE PER T DI DIMENSIONE 1

$\Rightarrow V^\perp$ È SOTTOSPAZIO DI DIMENSIONE $n-1$ INVARIANTE PER T, CIOÈ $T|_{V^\perp} : V^\perp \longrightarrow V^\perp$

E $T|_{V^\perp}$ È SIMMETRICO $\Rightarrow \exists\ B_{\perp n}$ DI $V^\perp$

TALE CHE $[T|_{V^\perp}]_{B\perp_n} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$ $(n-1)\times(n-1)$

$\Rightarrow$ PRENDO COME BASE DI $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{B}' = \left\{ \frac{V_0}{\|V_0\|} \right\} \cup \mathbb{B}_{\perp_n}$ È BASE ORTONORMALE

DI $\mathbb{R}^n \Rightarrow [T]_{B'} = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \lambda_1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_{n-1} \end{array} \right)$ c.v.d.

PROPOSIZIONE UNA MATRICE REALE $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ È ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILE $\Leftrightarrow$ È SIMMETRICA

DIMOSTRAZIONE "$\Leftarrow$" GIÀ DIMOSTRATO NEL TH DI STRUTTURA.

"$\Rightarrow$" SIA $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ORTOGONALMENTE DIAGONALIZZABILE, CIOÈ $\exists\, S$ ORTOGONALE TALE CHE $D = S^{-1} A S \Rightarrow A = S D S^{-1}$

$\Rightarrow A^T = (S D S^{-1})^T = (S^{-1})^T D^T S^T = (S^T)^T D^T S^{-1} =$

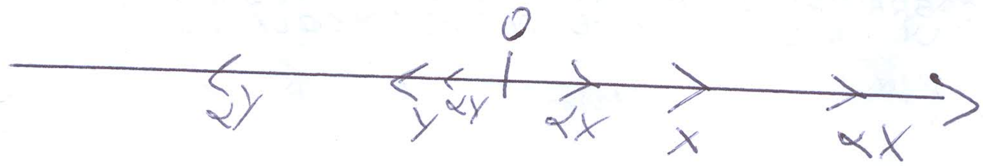
$= S D S^{-1} = A \Rightarrow A = A^T \Rightarrow$ SIMMETRICA

c.v.d

TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE ASSOCIATE AD OPERATORI SIMMETRICI

$T: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ OMOTETIA DI RAPPORTO α

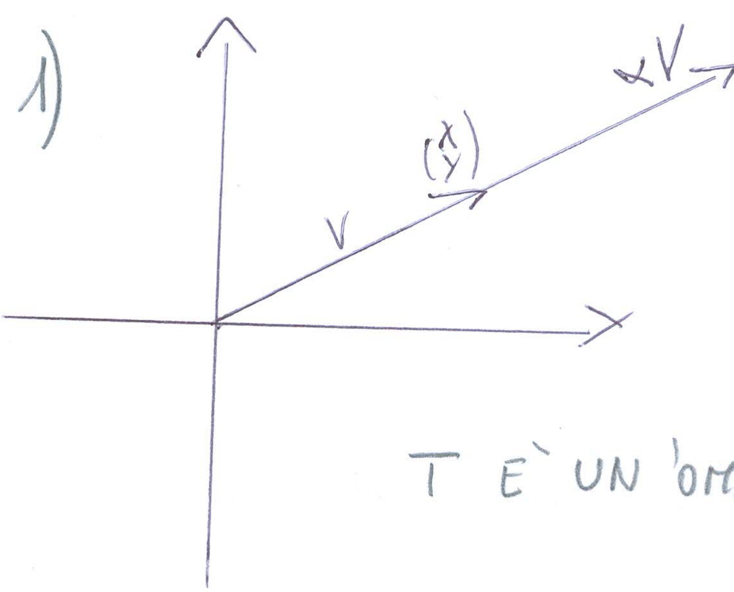
$x \longmapsto \alpha x$



$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \exists\, B_{\perp n}$ t.c. $[T]_{B_{\perp n}} = $ 1) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

OPPURE 2) $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

1)



$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

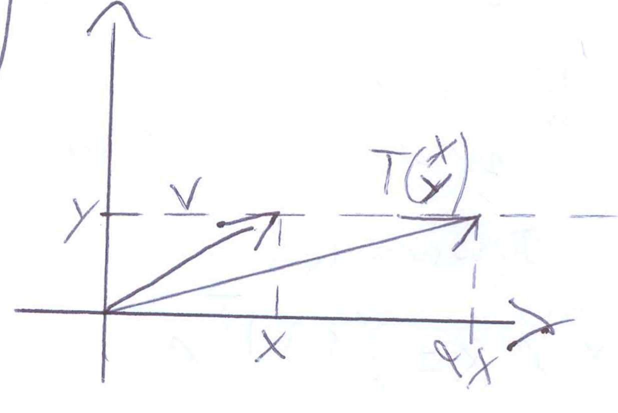
T È UN OMOTETIA DI RAPPORTO α.

2)

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ y \end{pmatrix}$$

OMOTETIA RISPETTO AD UNA RETTA: L'ASSE X



$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow$ L'OPERATORE T ASSOCIATO È LA COMPOSIZIONE DI DUE OPERATORI CHE SONO GEOMETRICAMENTE OMOTETIE DI RAPPORTO α E β RISPETTO A RETTE $\perp$. ANALOGAMENTE IN $\mathbb{R}^n$ UN OPERATORE SIMMETRICO È LA COMPOSIZIONE DI OMOTETIE LUNGO DIREZIONI A DUE A DUE PERPENDICOLARI.

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ SIMMETRICA È ASSOCIATA A

UNA FORMA QUADRATICA SU $\mathbb{R}^n$

UN OPERATORE SIMM.

$\Rightarrow$ HO DIM CHE $\exists\ D$ E $S \mid D = S^T A S$

$\Rightarrow$ HO DIM CHE $\exists\ D'$ E $S \mid D' = S^{-1} A S$

SE PRENDO S ORTOGONALE $\Rightarrow S^T = S^{-1} \Rightarrow D = D'$

CIOÈ LA MATRICE D (SIMILE AD A) È ANCHE LA MATRICE CONGRUENTE AD A CHE CI SERVE PER TROVARE LE FORME CANONICHE DELLE FORME QUADRATICHE: INFATTI POSTO $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ COORDINATE DI $\mathbb{R}^n$ NELLA BASE INIZIALE, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ COORDINATE NELLA BASE FINALE ED S LA MATRICE DI PASSAGGIO ORTOGONALE

$$\Rightarrow X^T A X = (SY)^T A (SY) = Y^T (S^T A S) Y = Y^T (S^{-1} A S) Y = Y^T D Y =$$

$=$ FORMA CANONICA DI $Q(X)$