/04/18

Sappiamo per th. di Sylvester che è possibile trovare una base ortonormale. Sappiamo che è possibile trovare tale base con l'algoritmo di GAUSS-LAGRANGE.

$$Q((x,y)) = x^2 + xy + y^2 \quad , \quad Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x^2 + xy + y^2$$

da questa forma quadratica, possiamo passare alla F. bilineare: $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto (*)$$

Presa la base canonica: $[Q]_e = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, che è anche la matrice della forma bilineare!

$$[F]_e = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x_2 & y_2 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \end{array} \Longrightarrow x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}y_1x_2 + y_1y_2 \; *$$

• Supponiamo di voler studiare la forma bilineare/quadratica:
> possiamo dare una base ortonormale

con il metodo di JACOBI: (MINORI N-0)

$\det([Q]_e) = 1 - \frac{1}{4} > 0$ (non degenere, si può usare JACOBI).

$$\Rightarrow \exists\, B_{\perp n} = \{v_1, v_2\} \mid [Q]_{B_{\perp n}} = [F]_{B_{\perp n}} = [I]_{2\times 2}$$

Nella nuova base $B_{\perp n}$, e quindi nel nuovo sist. di riferimento con coordinate u, v $\Rightarrow$ la forma q. Q è
$\Rightarrow Q((u,v)) = u^2 + v^2$

• Cerchiamo $B_{\perp n}$: riduciamo con GAUSS. $Q((x,y)) = x^2 + xy + y^2$
$= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}$ $\Rightarrow$ cambio le coordinate: $\begin{cases} u = x + \frac{y}{2} \\ v = y \end{cases}$ $\Rightarrow Q((u,v)) =$
$= u^2 + \frac{3}{4}v^2$ $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

A'' $[Id]_e^B$ è una matrice di cambio base.

...ora per trovare B, facciamo l'inversa di A:

$B = \left\{ \underset{b_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$ = perché: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Questa base B è <u>F-ORTOGONALE</u> (NON necessariamente ORTOGONALE per il prodotto scalare).

$F((b_1, b_2)) = x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_1 y_2 + \frac{1}{2} y_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

...QUAL'È LA NORMA DI b_1? $\|b_1\|_{F_Q} = \sqrt{Q(b_1)} = \sqrt{F(b_1, b_1)}$

$\|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\|_{F_Q} = \sqrt{1} = 1$; $\|b_2\|_{F_Q} = \sqrt{Q(b_2)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ LA BASE F_Q-ORTONORMALE È $B_{\perp n} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow$ in questa base, la matrice associata a F, è l'identità I.

(da notare, che con il prodotto scalare, avresti trovato una base ortogonale in uno spazio euclideo, e quindi una base di vettori perpendicolari.)

In $\mathbb{R}^3$ considero $U < \mathbb{R}^3$ definito dall'equazione: $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+z=0 \end{cases}$ (che è una retta). Come dicono $U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot u = 0 \ \forall u \in U \right\}$. • <u>Sappiamo che: $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^3$</u> E QUINDI $U^\perp$ È UN PIANO!

$u \in U \Rightarrow$ Troviamo la base di U: $\begin{cases} y = -3x \\ z = -2x \end{cases} \Rightarrow B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

usando la definizione di $U^\perp$: dato $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; $\Rightarrow x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x - 3y - 2z = 0} = U^\perp$ che è infatti un piano di $\mathbb{R}^3$.

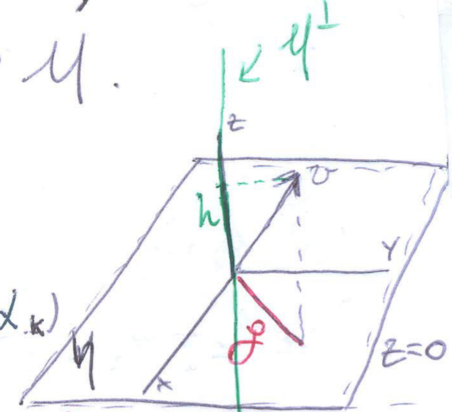
* È sempre possibile decomporre uno spazio, nella somma di un sottospazio e il suo COMPLEMENTO ortogonale!

(DETERMINARE)

[V]oglio, dato $v \in (V, \text{euclideo})$, con $\dim V = n$, e

un sottospazio $\mathcal{U} < V$, con $\dim \mathcal{U} = k$; $k < n$,

proiezione ortogonale di v, sul sottospazio $\mathcal{U}$.



g = proiezione ortogonale di v, su $\mathcal{U}$.

h = proiezione orto di v, su $\mathcal{U}^\perp$

$\Rightarrow \bar v = \bar g + \bar h$

vogliamo scrivere: $\bar v = \bar g + \bar h \Rightarrow \bar h = \bar v - \bar g$

data una base $B_{\mathcal{U}} = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$

$\Rightarrow g = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \Rightarrow$ cerchiamo la k-upla $(\alpha_1 \dots \alpha_k)$

So che $h \circ u_j = 0 \ \forall j = 1 \dots k \Rightarrow$

$$\begin{cases} h \circ u_1 = (\bar v - (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k)) \circ u_1 = 0 \\ h \circ u_2 = (\bar v - (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k)) \circ u_2 = 0 \\ \vdots \\ h \circ u_k = (v - (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k)) \circ u_k = 0 \end{cases}$$

che è un sist. lineare non omogeneo.

$$\begin{cases} \alpha_1 u_1 \circ u_1 + \alpha_2 u_2 \circ u_1 + \dots + \alpha_k u_k \circ u_1 = v \circ u_1 \\ \vdots \\ \alpha_1 u_1 \circ u_k + \alpha_2 u_2 \circ u_k + \dots + \alpha_k u_k \circ u_k = v \circ u_k \end{cases}$$

il rango di questo sist. è K, perchè l'ultimo minore di N-O è $\neq 0$ ed è il determinante JACOBI; TALE DET. È >0, POICHÉ LA MATRICE DEI COEFFICIENTI DEL SISTEMA È LA MATRICE ASSOCIATA AL PRODOTTO SCALAR CHE È DEFINITO POSITIVO

$\Rightarrow$ perciò esiste una soluzione del sistema!

gli $\alpha_1 \dots \alpha_k$ sono i coefficienti di FOURIER solo se la base è ORTOGONALE: INFATTI

SE $u_i \circ u_j = 0 \ \forall i \neq j \Rightarrow$ il sistema diventa:

$$\begin{cases} \alpha_1 u_1 \circ u_1 + 0 + 0 + \dots = v \circ u_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha_k u_k \circ u_k = v \circ u_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{v \circ u_1}{\|u_1\|^2}, \quad \alpha_2 = \frac{v \circ u_2}{\|u_2\|^2}, \quad \dots$$

ESERCIZIO 3: 4

In $\mathbb{R}^3$ euclideo, CONSIDERIAMO $U = x - 3y - 2z = 0$

1) Sia $v = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, cerchiamo la proiezione orto. di v su U.

Sia $B_U = \left\{ \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

$x = 3y + 2z$

x	y	z
3	1	0
2	0	1

$$\begin{cases} \alpha_1 u_1 \circ u_1 + \alpha_2 u_2 \circ u_1 = v \circ u_1 \\ \alpha_1 u_1 \circ u_2 + \alpha_2 u_2 \circ u_2 = v \circ u_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 10\alpha_1 + 6\alpha_2 = 3 \\ 6\alpha_1 + 5\alpha_2 = 3 \end{cases} \xRightarrow{\text{Risolvendo}} \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{15}{70} = -\frac{3}{14} \\ \alpha_2 = \frac{6}{7} \end{cases}$$

$$g = -\frac{3}{14}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{6}{7}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15/14\\-3/14\\6/7\end{pmatrix}$$

che sono le coordinate del vettore proiezione ortogonale di v su U

2) Cerchiamo: $(B_U)_\perp = \{w_1, w_2\} \mid w_1, w_2 \in U$ e $w_1 \circ w_2 = 0$

Prendiamo un vettore w_1 a scelta: $w_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow w_2 = \begin{pmatrix}3y+2z\\y\\z\end{pmatrix} \Rightarrow w_1 \circ w_2 = \boxed{6y + 5z = 0}$$

che è il piano di tutti i vettori ortogonali a w_1. ne prendiamo uno a scelta!

$$w_2 = \begin{pmatrix}-3\\-5\\6\end{pmatrix} \Rightarrow w_1 \circ w_2 = 0$$

$$\Rightarrow (B_U)_\perp = \left\{ \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-5\\6\end{pmatrix} \right\}$$

$$g = \frac{v \circ w_1}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{v \circ w_2}{\|w_2\|^2} w_2$$