15/11/2017

Come si può scrivere un sistema lineare di p equazioni in n incognite?

Un sistema lineare di p equazioni in n incognite è dato

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$ si può anche scrivere ponendo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n} \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}_{p\times n}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}_{p\times 1}$$

$\Rightarrow \Sigma : Ax = B$ Inoltre posso scrivere $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots a_{pn}x_n \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ e quindi: $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n}x_n \\ a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{pn}x_n \end{pmatrix} + = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{p1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{p2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \Sigma : x_1 C_A^1 + x_2 C_A^2 + \dots x_n C_A^n = B$ LA COLONNA DEI TERMINI NOTI È COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI COLONNA DI A.

<u>Proposizione</u>: Sia $A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ e determino la matrice $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ con $B \sim A \Rightarrow$ 1) se le colonne linearmente indipendenti occupano determinate posizioni nella matrice A, nella matrice B le stesse posizioni sono occupate ancora da vettori colonna linearmente indipendenti;

2) Analogamente accade per le colonne linearmente indipendenti e inoltre le rispettive combinazioni lineari che danno tali vettori in funzione di quelli linearmente indipendenti delle 2 Matrici presentano gli stessi coefficienti

Vediamo 1): Dimostrazione: supponiamo che le colonne C_A^i e C_A^j siano lin. ind. e dimostriamo che C_B^i e C_B^j sono lin. ind. $\Rightarrow$ pongo $\alpha C_B^i + \beta C_B^j = 0$

Posso scrivere $0\,C_B^1 + 0\,C_B^2 + \dots + \alpha\, C_B^i + 0\,C_B^{i+1} + \dots + \beta\, C_B^j + 0\,C_B^{j+1} + \dots$

$+ 0\,C_B^n = 0$ Scrivere questa combinazione lineare è come scrivere il sistema lineare Σ_B NELLA FORMA:

$$\Rightarrow B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ (vettore nullo)} \Rightarrow$$

Questo vettore è soluzione di Σ_B $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \\ \vdots \\ \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in Sol\, \Sigma_B$

con $\Sigma_B : Bx = 0$ $\Rightarrow$ poiché lo spazio delle soluzioni non cambia, il vettore è soluzione anche di $\Sigma_A : A \cdot X = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha \\ \beta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in Sol\, \Sigma_A \rightarrow \text{(perché sono sistemi equivalenti)}$$

$$\Sigma_A : Ax = 0$$

Posso dunque scrivere: $A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ E QUINDI

$$\Rightarrow 0\,C_A^1 + 0\,C_A^2 + \dots \alpha\, C_A^i + 0\,C_A^{i+1} + \dots + \beta\, C_A^j + 0\,C_A^{j+1} + \dots 0\,C_A^n = 0$$

Togliamo gli $0 \cdot C_A^l \Rightarrow \alpha\, C_A^i + \beta\, C_A^j \Rightarrow$ combinazione lineare; essendo C_A^i e C_A^j son lin ind., $\alpha = \beta = 0$ e pertanto C_B^i e C_B^j sono linearmente indipendenti

Dimostriamo 2): Supponiamo che C_A^j sia combinazione lineare delle altre colonne: $C_A^j = \alpha_1 C_A^1 + \alpha_2 C_A^2 + \dots + \alpha_{j-1} C_A^{j-1} + \alpha_{j+1} C_A^{j+1} + \dots \alpha_n C_A^n$

$0 = \alpha_1 C_A^1 + \dots + \alpha_{j-1} C_A^{j-1} - C_A^j + \alpha_{j+1} C_A^{j+1} + \dots + \alpha_n C_A^n \rightarrow$ combinazione lin di tutte le colonne

posso scrivere $A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{j-1} \\ -1 \\ \alpha_{j+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$ come prima $\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in Sol\, \Sigma_A$

dove Σ_A è $Ax = 0$

poiché $B \sim A \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in Sol\, \Sigma_B$ dove Σ_B è $BX = 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 C_B^1 + \alpha_2 C_B^2 + \dots - C_B^j + \alpha_{j+1} C_B^{j+1} + \dots \alpha_n C_B^n = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 C_B^1 + \alpha_2 C_B^2 + \dots + \alpha_{j-1} C_B^{j-1} + \alpha_{j+1} C_B^{j+1} + \dots \alpha_n C_B^n = C_B^j$$

C_B^j è combinazione lineare delle altre colonne, $\rightarrow$ le rispettive combinazioni lineari presentano gli stessi coefficienti

c.v.d.

Applichiamo quanto dimostrato:

Dati K vettori linearmente indipendenti in uno spazio n-dimensionale con $K < n$, $\Rightarrow$ cerco una base dello spazio n-dimensionale che contenga tali K-vettori.

Esempio: Siano $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ due vettori $\mathbb{R}^4$ linearmente indipendenti.

Cerchiamo una base di $\mathbb{R}^4$ che sia fatta così: $B_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3, v_4 \right\}$

$\Rightarrow$ formo la matrice

$$\underset{4\times 6}{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ Base canonica di $\mathbb{R}^4$

So che il $rg\, A = 4$ (perché ha 4 vettori colonna ~~righe~~ linearmente indipendenti E 4 È IL RANGO MASSIMO POSSIBILE)

Dobbiamo trovare dei minori non nulli 4×4 che contengano $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ riduco a gradini A con il metodo di Gauss:

$R_1 - 2R_2 \rightarrow R_2$; $R_1 + 2R_3 \rightarrow R_3$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{R_2 + 2R_4 \rightarrow R_4}{\overset{R_2 + R_3 \rightarrow R_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$R_3 - R_4 \rightarrow R_4$

$$\underset{\left(\frac{R_3}{2}\right)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ le ~~righe~~ colonne dei PIVOT sono linearmente indipendenti $\rightarrow$ prendiamo i vettori iniziali CHE OCCUPANO QUELLE POSIZIONI

$\mapsto$ la $B_{\mathbb{R}^4} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Cerchiamo la matrice equivalente RIDOTTA A FORMA CANONICA

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{R_1 - R_3 \rightarrow R_1}{\overset{R_2 - R_3 \rightarrow R_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \overset{\frac{R_1}{2} \rightarrow R_1 ;\ \frac{R_2}{-2} \rightarrow R_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ \ C^1\ \ C^2\ \ C^3\ \ C^4\ \ C^5\ \ C^6 \end{array}$$

$R_3 + R_4 \rightarrow R_3$

$2R_4 + R_2 \rightarrow R_2$

$$C^5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1\,C^1 + 0\,C^2 + 2\,C^3 + 1\,C^4$$

$$= -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ LA 5^a COLONNA DELLA MATRICE INIZI~~LE~~ È COMBINAZIONE LINEARE DELLE PRIME 4 COLONNE CON GLI STESSI COEFFICIENTI

Facciamo vedere quello che abbiamo dimostrato prendendo i coefficienti di C^5 e i primi 4 vettori colonna della matrice di partenza

$$-1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2+2 \\ -1+1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ cioè C^5 della matrice iniziale

~ ~ — — — —

Dati U e $W < V$ spazio vettoriale, cerchiamo una base di $U \cap W$ date le basi di U e di W

Esempio: $V = \mathbb{R}^4$, $U = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$ PIANO in $\mathbb{R}^4$

considero $W = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$ spazio 3 dimensionale in $\mathbb{R}^4$

Quale può essere la dimensione di $U \cap W$? TEOREMA DI GRASMANN:

$$\underset{2}{\dim U} + \underset{3}{\dim W} = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$$

$\dim(U+W)$: ~~4~~ 3 ~~(ad esempio)~~ 4 — 5 è impossibile

$\dim(U \cap W)$: 2 (al massimo); 1 (è possibile); 0 (NON È POSSIBILE)

U è contenuto in W se i due ~~vt~~ sono combinazioni lineari di w
→ devono essere lin. dipendenti.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ → affinché u e w siano linearmente dipendenti il rango di $A \neq 4$

$\det A \neq 0 \Rightarrow$ i 4 vettori sono linearmente indipendenti → U non sta in W