Classificazione degli operatori isometrici in $\mathbb{R}^3$

In $\mathbb{R}^3$ si hanno:

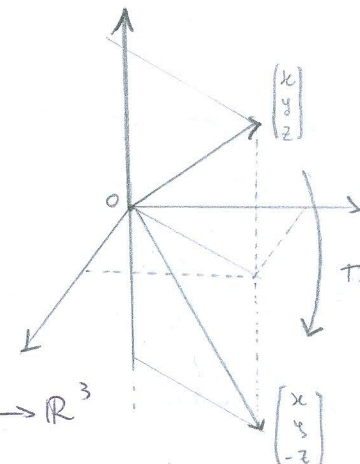
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$|A_1| = 1 \qquad |A_2| = -1 \qquad |A_3| = 1$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \quad A_6 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

$|A_4| = -1 \qquad |A_5| = 1 \qquad |A_6| = -1$

Vedere le trasformazioni geometriche associate a tali matrici nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ (ESERCIZIO).



Esempio:

$T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $(T_2)_e = A_2$

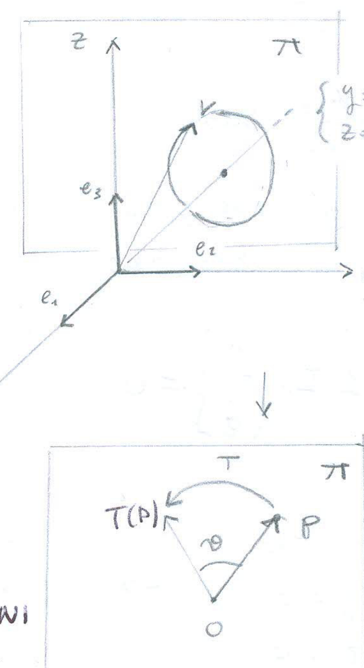
dato $v \in \mathbb{R}^3$ tale che:

$$[v]_e = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow [T(v)]_e = A_2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto (x, y, -z) \end{array}$$

~~A~~ seconda dei determinanti ($\det = \pm 1$) le trasformazioni vengono classificate in simmetrie e rotazioni, considerando la trasformazione T_5:

e_1 È AUTOVETTORE DI AUTOVALORE 1, E TALE È OGNI SUO MULTIPLO:

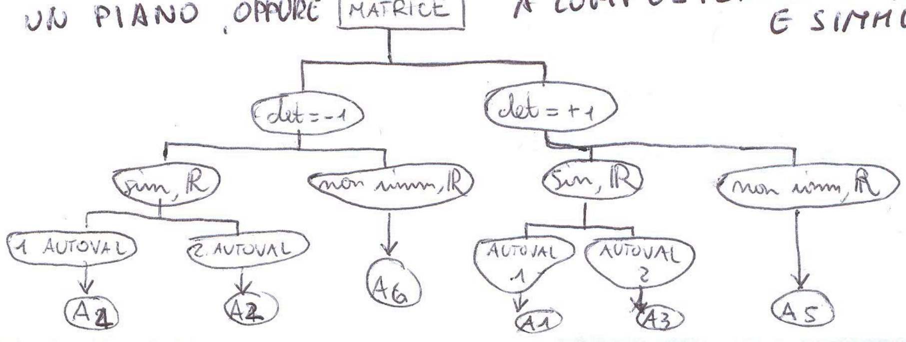
$T_5(\alpha e_1) = \alpha T_5(e_1) = \alpha e_1$.



Lo spazio $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ è l'autospazio relativo all'autovettore e_1. Il vettore trasformato è ruotato di un angolo ϑ sul piano $x = 0$.

I vettori ~~ruotano~~ dello spazio ruotano di un angolo ϑ intorno all'asse di rotazione.

Le matrici con $\det = +1$ sono ASSOCIATE A rotazioni, quelle con $\det = -1$ SONO ASSOCIATE A SIMMETRIE RISPETTO AD UN PIANO, OPPURE A COMPOSIZIONI DI ROTAZIONI E SIMMETRIE.



In $\mathbb{R}^3$ si hanno solo 2 tipi di operatori isometrici, DIVERSI:

- simmetria rispetto ad un piano
- rotazione intorno ad una retta

Esercizio 1

Studiare l'operatore isometrico di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice in base canonica è:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) E' un operatore isometrico:

(1.1) A è ortogonale:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

(2) A non è simmetrica, quindi non è diagonalizzabile.

$$|A| = 1$$

Esiste una base $B_{\perp n}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$[T]_{B_{\perp n}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

è una $\underset{\text{pura}}{\text{rotazione}}$ intorno ad una retta, di angolo ~~co~~ ϑ.

(3) Cerco gli elementi caratteristici di T

(3.1) Asse di rotazione: autospazio relativo a $\lambda = 1$:

$$(A - 1 \cdot I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ +1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + z = 0 \\ x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \quad \text{ASSE DI ROTAZIONE}$$

Il rango di $[A-I]$ si sa già che non è massimo e deve essere $rg = 2$ quindi basta scartare nel sistema un'eq.ne lin. dip. con le altre.

Il piano di rotazione (sottospazio vettoriale) é perpendicolare all'asse di rotazione:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

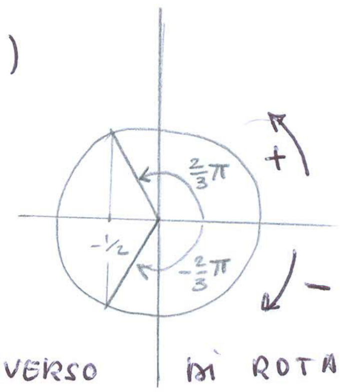
$\pi \perp$ asse é dato ~~da~~:

$$x + y + z = 0$$

Tutti i piani paralleli $x+y+z=k$ $k \in \mathbb{R}$ sono piani di rotazione.

(3.2) La traccia della matrice A é uguale alla traccia di A_S: (PERCHE INVARIANTI PER SIMILITUDINE)

$$0 = 1 + 2\cos\vartheta \qquad \cos\vartheta = -\frac{1}{2}$$



può essere $\alpha = \pm\frac{2}{3}\pi$

PER SAPERE QUALE ANGOLO SIA, BASTA TROVARE IL VERSO DI ROTAZIONE

~~(3.3)~~ Per trovare ~~la~~ il senso della rotazione:

$$B = S^{-1} A S \qquad S \text{ matrice di passaggio}$$

$\Big\downarrow$ in pratica

$B = S^T A S$ POICHÈ LA BASE FINALE DEVE ESSERE ORTONORMALE E QUINDI LA MATRICE S SARÀ ORTOGONALE.

PER STABILIRE IL VERSO DELLA ROTAZIONE, VALUTIAMO IL DETERMINANTE:

$$\det\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{vettore asse} & \text{vettore del piano di rot.} & T(C^2) \end{bmatrix} = \begin{cases} ~~\text{det}~~ > 0 \Rightarrow \circlearrowleft \text{ senso della rotazione é } + \\ < 0 \Rightarrow \circlearrowright \text{ senso della rotazione é } - \end{cases}$$

~~Il~~ det $\neq 0$ perché C_1, C_2, C_3 sono lin indip.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1(-2) = 3 \quad (\text{VERSO ANTIORARIO!}) \Rightarrow \vartheta = +\frac{2}{3}\pi \Rightarrow$$

$\downarrow$

Si orienta l'asse in modo positivo, se fosse stato $(-1,-1,-1)$ la rotazione ~~sarebbe~~ sarebbe stata negativa (vista dall'altro lato del piano).

$$\Rightarrow \quad [T]_{\mathcal{B}_{\perp n}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\mathcal{B}_{\perp n} = \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{VETTORE} \\ \text{DELL'ASSE}}}{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}}_{\text{VETTORI DEL PIANO, ORTONORMALI}} \right\}$$

($z = -x - y$ $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ $\quad x - y = 0 \quad x = y$

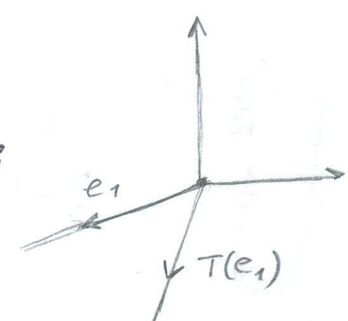
$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{6}$ etc..)

ESERCIZIO

Studiare la trasformazione isometrica definita dalla matrice $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sappiamo che le matrici simmetriche sono diagonalizzabili ortogonalmente, quindi sapendo che $\det A = -1$ e $\operatorname{Tr} A = 1$ $\Rightarrow$ gli autovalori della matrice A sono $1, 1, -1$ quindi la matrice diagonale simile ad A sarà

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



La matrice A ci dice che $T(e_3) = e_3$ mentre $T(e_1) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ che quindi rimane nel piano $z=0$ e così $T(e_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ rimane nel piano $z=0$ che quindi è un piano $\perp$ al piano di riflessione

Considero il vettore $v = e_1 + T(e_1)$

$$T(e_1 + T(e_1)) = T(e_1) + T(T(e_1)) = T(e_1) + T^2(e_1)$$

$T^2 =$ identità : infatti $A \cdot A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} & \sqrt{2}^{-1} & 0 \\ \sqrt{2}^{-1} & -\sqrt{2}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} & \sqrt{2}^{-1} & 0 \\ \sqrt{2}^{-1} & -\sqrt{2}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T(e_1) + T^2(e_1) = T(e_1) + e_1$$

$\Rightarrow$ $v = e_1 + T(e_1)$ è un autovettore di autovalore 1 $\Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2}^{-1} \\ \sqrt{2}^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

e così $e_2 + T(e_2) \Rightarrow T(e_2 + T(e_2)) = T(e_2) + e_2$

In generale preso $v \neq 0 \Rightarrow v + T(v)$ è autovettore di autovalore 1

$$\Rightarrow E(1) = \{ v + T(v) \mid \forall v \in \mathbb{R}^3 \} : \text{ se } v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow v + T(v) = \begin{pmatrix} \frac{(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}\alpha + \frac{\beta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\beta \\ 2\gamma \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ prendiamo due tali vettori l.i e determiniamo $E(1)$

Possiamo anche trovarlo usando $\lambda = 1$ nella matrice A :

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1-\sqrt{2})x + y = 0 \\ x - (1+\sqrt{2})y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow E(1) = : \quad y = (\sqrt{2}-1)x \quad$ è il piano di riflessione π

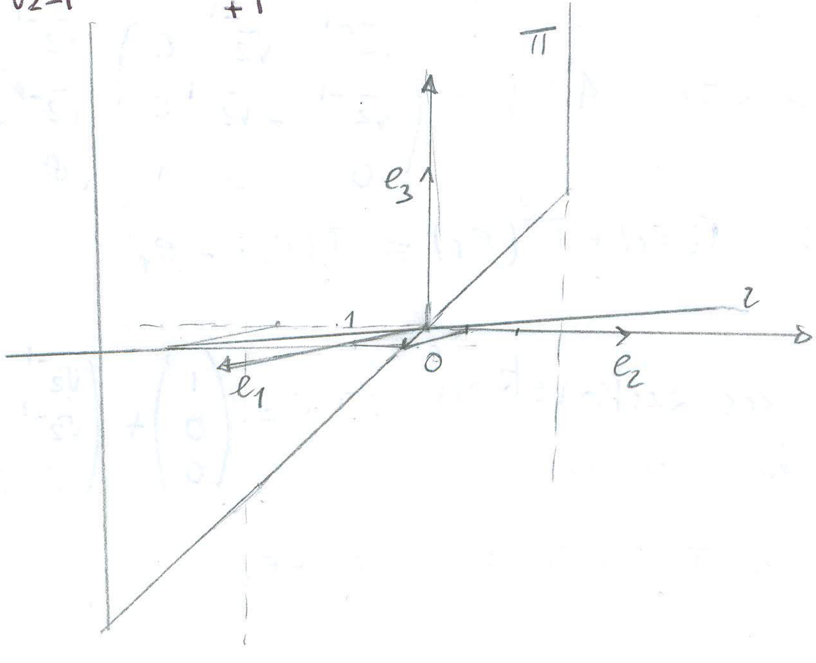
$E(-1)$ sarà una retta $\perp$ a tale piano

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (1+\sqrt{2})x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ retta } r$$

Vediamo se sono $\perp$:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -(1+\sqrt{2})t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{+(1+\sqrt{2})}{+1} \quad \text{ok sono } \perp$$



$\boxed{\text{ESERCIZIO}}$

La matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ non è simmetrica

ed ha determinante 1, ed è ortogonale $\Rightarrow$ nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ rappresenta una rotazione

L'asse della rotazione è l'autospazio relativo all'autovalore 1 (unica radice caratteristica reale di A)

$$\Rightarrow (A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & \sqrt{3}-2 & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{3} & \sqrt{3}-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ essendo il rango della matrice $= 2$, avremo

$$\begin{cases} (\sqrt{3}-2)x + y + (1-\sqrt{3})z = 0 \\ (1-\sqrt{3})x + (\sqrt{3}-2)y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Asse di rotazione è $\begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$ cioè $\left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$.

La direzione dei piani di rotazione è $x+y+z=0$

Calcoliamo l'angolo di rotazione: uguagliamo le tracce

$$\Rightarrow \cancel{3}\,\frac{\cancel{1}+\sqrt{3}}{\cancel{3}} = \cancel{1}+2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

θ può essere $+\frac{\pi}{6}$ o $-\frac{\pi}{6}$: dobbiamo trovare il verso della rotazione $\Rightarrow$

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1/\sqrt{3} \\ 1 & -1 & -2/\sqrt{3} \\ 1 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \cap & \cap & \shortparallel \\ \text{asse di rot} & \text{piano di rot} & A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \end{array} = -\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} < 0$$

la rotazione avviene in verso negativo

$$\Rightarrow \boxed{A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}}$$