14/3/2018

Relazione di equivalenza tra matrici quadrate: RELAZIONE DI CONGRUENZA "$\sim_C$" ~~[illegible]~~

(Abbiamo 3 relazioni tra matrici < EQUIVALENZA, SIMILITUDINE, CONGRUENZA)

$A \sim_C B \iff \exists S$ invertibile tale che $B = S^T A S$

rango di matrici congruenti: DIMOSTRIAMO CHE SI MANTIENE UGUALE, MEDIANTE IL SEGUENTE

LEMMA, Siano A, S matrici quadrate $\in M_{n\times n}$ ed S invertibile $\Rightarrow rg\, AS = rg\, SA = rg\, A$

dimostrazione, $rg\, AS = rg\, A$; Considero AS: le sue colonne sono combinazione lineare delle colonne di A

Quando abbiamo CONSIDERATO $A\ X = B$ abbiamo detto che $A\ S$ poteva essere visto come combinazione lineare delle colonne di A con coefficienti le ENTRATE DELLE colonne di S $\Rightarrow rg\, AS \leq rg\, A$. Dobbiamo dimostrare anche $AS \geq A$ in modo da avere un'uguaglianza: pongo $B = AS$ e $T = S^{-1}$ e considero BT allora ho dimostrato che $rg\, BT \leq B$ perche stessa situazione di sopra; ma $rg\, BT = rg\, ASS^{-1} = rg\, A \leq rg\, AS \Rightarrow \boxed{rg\, AS = rg\, A}$. Posso dimostrare anche $rg\, SA = rg\, A$: $rg\, SA = rg(SA)^T = rg\, A^T S^T = rg\, A^T = rg\, A$ c.v.d

Questo lemma serve per studiare il rango di matrici congruenti: siano $A, B \in M_{n\times n}$ $A \sim_C B \Rightarrow B = S^T A S$ allora $rg\, B = rg(S^T A)S = rg\, S^T A = rg\, A$: abbiamo così dimostrato che i ranghi di matrici congruenti coincidono.

OSSERVAZIONE: Posso definire un'applicazione $\mathcal{F}: Bil(V) \longrightarrow M_{n\times n}$ fissata la base B di V

$$F \longmapsto [F]_B$$
$$X^T A Y \longleftarrow A$$

(QUINDI È NON CANONICO)

si dimostra che $\mathcal{F}$ è un isomorfismo (DATO fissata la base) (da dim.)

DEFINIZIONE: 1] $F: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineare è detta simmetrica $\iff F((v,w)) = F((w,v))\ \forall v, w \in V$ $\Rightarrow [F]_B$ è simmetrica qualunque sia B di V

2] F è detta antisimmetrica $\iff F((v,w)) = -F((w,v))\ \forall v,w \in V \Rightarrow [F]_B$ È ANTISIMMETRICA $\forall B$

3] F è detta alternante se $F((v,v)) = 0\ \forall v \in V$

OSSERVAZIONE: Su $\mathbb{R}$, F è alternante $\iff$ è antisimmetrica: se $F((v,w)) = -F((w,v))\ \forall v,w \in V \Rightarrow F((v,v)) = -F((v,v))$ $\Rightarrow F((v,v)) = 0\ \forall v \in V$

4] $F: V\times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineare simmetrica ($\iff F((v,w)) = F((w,v))\ \forall v,w \in V$) è detta definita positiva se $F((v,v)) > 0\ \forall v \neq 0$

5] $F: V\times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineare simmetrica è detta definita negativa se $F((v,v)) < 0\ \forall v \neq 0$

6] $F: V\times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineare simmetrica è detta positiva se $F((v,v)) \geq 0\ \forall v \in V$

7] $F: V\times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineare simmetrica è detta negativa se $F((v,v)) \leq 0\ \forall v \in V$

~~[illegible]~~

8] $F: V\times V \rightarrow \mathbb{R}$ bilineare simmetrica è detta indeterminata negli altri casi

Per casa dare esempi per ogni definizione.