molteplicità di una radice

Dato un polinomio $p(x)$; uno zero (o radice) di $P(x)$ è lo scalare α tale che $P(\alpha)=0$; la MOLTEPLICITÀ della radice α è il massimo $\ell \in \mathbb{N}$ per cui il binomio $(x-\alpha)^\ell$ divide $P(x)$, cioè $P(x)$ si può scomporre nel prodotto $(x-\alpha)^\ell \cdot q(x)$ dove $q(x)$ è un polinomio non divisibile per $(x-\alpha)$.
La molteplicità di α si indica con $\mu(\alpha)$.

ESEMPIO

$P(x)=(x-2)^3(x+5)^2(x-1)$

Le radici di $P(x)$ sono $x=2$, $x=-5$, $x=1$ e $\mu(2)=3$, $\mu(-5)=2$, $\mu(1)=1$

$x=1$ è radice **semplice**

se $\mu(\alpha)>1 \Rightarrow \alpha$ è radice **multipla**

- Dato un polinomio $P_A(\lambda)$ polinomio caratteristico di $A \Rightarrow P_A(\lambda)=|A-\lambda I|$, sia $A \in M_{n\times n}$ si dimostra che

$P_A(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\dots+c_{n-1}\lambda+c_n$

con $c_k=(-1)^{n-k}\cdot\sum\left(\text{minori principali di ordine } k \text{ di } A\right)$

{Abbiamo che il coefficiente del termine di grado massimo è $(-1)^n$}

{Se avessi $P_A(\lambda)=|\lambda I-A|$ il coeff. del termine di grado massimo sarebbe $+1$}
SEMPRE

ESEMPIO

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

I **minori principali** di ordine 2 sono i determ. delle sottomatrici 2x2 che otteniamo in questo modo: Gli elementi della diagonale della sottomatrice devono essere elementi della diagonale principale della matrice A

$$\begin{pmatrix}1&2&\cancel{3}\\4&5&\cancel{6}\\\cancel{7}&\cancel{8}&\cancel{9}\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}\qquad\begin{pmatrix}\cancel{1}&\cancel{2}&\cancel{3}\\\cancel{4}&5&6\\\cancel{7}&8&9\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{vmatrix}5&6\\8&9\end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&\cancel{2}&3\\\cancel{4}&\cancel{5}&\cancel{6}\\7&\cancel{8}&9\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{vmatrix}1&3\\7&9\end{vmatrix}$$

CASI PARTICOLARI:

! $c_1=(-1)^{n-1}\cdot\sum\left(\text{minori principali di ordine 1}\right)=(-1)^{n-1}\cdot$ **Traccia di A** $=(-1)^{n-1}\cdot(a_{11}+\dots+a_{nn})$

Traccia di A → elementi della diagonale principale

$c_n=\det A$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow P_A(\lambda) = \lambda^2 - \underbrace{5}_{\text{traccia } A}\lambda - \underbrace{2}_{\det A}$$

- Se tutte le radici di $P_A(\lambda)$ stanno nel campo K in cui lavoriamo (solitamente $\mathbb{R}$) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{l} \mu(\lambda_i) = n$ se n è il $\deg P_A(\lambda)$

- Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. Ma matrici che hanno lo stesso polinomio caratteristico sono necessariamente simili? NO.

Date $A, B \in M_{n\times n}$ con $P_A(\lambda) = P_B(\lambda) \not\Rightarrow A \sim_S B$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 \quad P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

Se $A \sim_S B \Rightarrow \exists\, S$ invertibile tale che $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$ oppure analogamente $SB = \underbrace{SS^{-1}}_{I} A \cdot S = A \cdot S$

Pongo $S = \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ x+y = y \\ z = z \\ z+v = v \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & v \end{pmatrix} \text{ ma } S \text{ non è invertibile} \Rightarrow \boxed{A \not\sim_S B}$$

PROPOSIZIONE

Sia $T: V \to V$ operatore biettivo $\Rightarrow$ se $W \leq V$ è invariante per $T \Rightarrow W$ è sottospazio invariante anche per T^{-1}

DIMOSTRAZIONE

Da fare a casa
(sfruttare definizione sottospazio invariante)

1) Dato $T: V \to V$ operatore, come è fatta $[T]_B^B$ se la base B ha come primi k vettori, vettori che appartengono a un sottospazio invariante W di V? $\longrightarrow$ Per casa

2) Com'è fatta la base perchè $[T]_B^B$ sia diagonale?
↳ Per casa

DEFINIZIONE

Dato l'operatore $T: V \to V$ chiamo **AUTOVETTORE** di T, un vettore $v \in V, v \neq 0$, per il quale $\exists \lambda \in K$ (K campo in cui lavoriamo) tale che $T(v) = \lambda v$ $\qquad$ λ è detto **AUTOVALORE** di T

Supponiamo che esista un autovettore v relativo all'autovalore λ cioè tale che $T(v) = \lambda v$

È unico? No.
Infatti se prendo un suo multiplo $w = \alpha v$, $\alpha \in K$
$\Rightarrow T(w) = T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha \cdot \lambda v = \lambda \alpha v$ (prodotto fra scalari) $\overset{!}{=} \underline{\underline{\lambda w}}$ ⇝ w altro autovettore relativo allo stesso autovalore λ

Chiamo $E_\lambda = \left\{ \begin{array}{l} v \in V \text{ con } v \text{ autovettore relativo all'autovalore } \lambda, \\ \text{cioè } \mid T(v) = \lambda v \end{array} \right\} \cup \{0\}$

$\Rightarrow E_\lambda$ è sottospazio vettoriale di V, detto **AUTOSPAZIO** di T relativo all'autovalore λ

1. Prima proprietà verificata ✓✓ $\{0\} \in E_\lambda$
2. Seconda proprietà verificata ✓✓ (Abbiamo già dimostrato che il prodotto di v per uno scalare $\in E_\lambda$)
3. DIMOSTRIAMO che se $v_1, v_2 \in E_\lambda \Rightarrow v_1 + v_2 \in E_\lambda$

$T(v_1) = \lambda v_1$ e $T(v_2) = \lambda v_2$

considero $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ (linearità)
$\overset{!}{=} \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$ ✓✓

Terza proprietà verificata

PROPOSIZIONE

$\downarrow$

Ogni autospazio è sottospazio invariante di T

DIMOSTRAZIONE

$\downarrow$

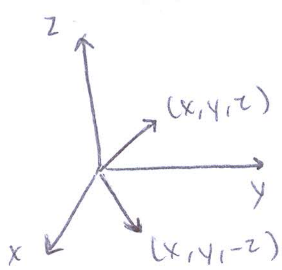
Detto E_λ l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda \Rightarrow T(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$
cioè dato $v \in E_\lambda \Rightarrow T(v) \in E_\lambda \quad \forall v$

$T(v) = \lambda v \in E_\lambda$ perchè E_λ è sottospazio vettoriale

Ma ogni sottospazio invariante è un autospazio? NO.

ESEMPIO

$T: \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$ simmetria rispetto al piano $z=0$



Quali sono i suoi sottospazi invarianti?

$\boxed{z=0}$ è un sottospazio invariante: è autospazio?

Dato $v \in$ al piano $z=0$
$\Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ tale che $T(v) = \lambda v$

$T(v) = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ $\exists \lambda = 1$ che opera come cerchiamo

$\Rightarrow \boxed{z=0}$ è un autospazio E_1

! Il fascio dei piani che contengono z é un insieme di sottospazi invarianti.

$\boxed{x=0}$ è invariante $\leadsto$ è autospazio?

$T\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -z \end{pmatrix} \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ -z \end{pmatrix}$? NO

$\boxed{x=0}$ è invariante ma <u>NON</u> è autospazio

$E_\lambda = \{ v \mid T(v) = \lambda v \}$ con $\lambda \in K$ e $T: V \to V$

- Cerco gli autovettori che soddisfano la condizione $T(v) = \lambda v$

$T(v) - \lambda v = 0 \Rightarrow T(v) - \lambda id(v) = 0 \Rightarrow (T - \lambda id)(v) = 0$

$\Rightarrow v \in Ker(T - \lambda id)$ e voglio che $ker(T - \lambda id) \neq 0$ (POICHÉ $v \neq 0$), cioè che

$T - \lambda id$ non sia iniettiva e quindi non suriettiva

Fisso B_V base in V e considero $[T - \lambda id]_{B_V}^{B_V} = [T]_{B_V}^{B_V} - \lambda \underbrace{[id]_{B_V}^{B_V}}_{I} =$

$= [T]_{B_V}^{B_V} - \lambda I$ la dim dell'immagine NON deve essere n

$\Rightarrow$ Tale matrice NON deve avere rango massimo

cioè $|[T]_{B_V}^{B_V} - \lambda I| = 0$

Pertanto le radici caratteristiche di $[T]_{B_V}^{B_V}$ sono gli autovalori di T. Quindi detta λ_0 una di tali radici, $E_{\lambda_0} = Sol \Sigma_{\lambda_0}$

dove Σ_{λ_0} è $([T]_{B_V}^{B_V} - \lambda_0 I)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

DEFINIZIONE

La $\dim E_{\lambda_0}$ è detta anche molteplicità geometrica di λ_0

ESERCIZIO

$\dim E_{\lambda_0} \geq 1$ da Dimostrare

PROPOSIZIONE

1) Ogni autovettore è relativo a un solo autovalore (per assurdo...)
2) Autovettori relativi ad autovalori diversi sono linearmente indipendenti

DIMOSTRAZIONE

Per casa