12/12/2017

SUPPONIAMO:

$$\begin{array}{ccc}
 & [L]^B_B & \\
(V, B) & \xrightarrow{\quad L \quad} & (V, B) \\
{\scriptstyle [\tilde{id}_V]^B_{B_1} \Leftarrow id_V} \Big\uparrow & & \Big\downarrow {\scriptstyle id_V \Rightarrow [id_V]^{B_1}_B} \\
(V, B_1) & \xrightarrow{\quad L \quad} & (V, B_1) \\
 & [L]^{B_1}_{B_1} &
\end{array}$$

L è un operatore

$[\tilde{id}_V]^B_{B_1}$ e $[id_V]^{B_1}_B$ sono inverse l'una dell'altra, cioè

$$\Downarrow$$

$$[\tilde{id}_V]^B_{B_1} = \left([id_V]^{B_1}_B\right)^{-1}$$

INFATTI

$$id_V \circ \tilde{id}_V = id_V \quad \text{e quindi}$$

$$\Downarrow$$

$$[id_V]^{B_1}_B \cdot [\tilde{id}_V]^B_{B_1} = [id]^{B_1}_{B_1} = I \Rightarrow [\tilde{id}_V]^B_{B_1} = \left([(id_V)]^{B_1}_B\right)^{-1}$$

(PERCHÈ LE BASI SONO UGUALI)

CHIAMIAMO $[\tilde{id}_V]^B_{B_1} = S \Rightarrow [id_V]^{B_1}_B = S^{-1} \Longrightarrow$

POICHÈ ABBIAMO:

$$[L]^{B_1}_{B_1} = [id_V]^{B_1}_B \cdot [L]^B_B \cdot [\tilde{id}_V]^B_{B_1} \Rightarrow \text{POSSIAMO SCRIVERE}$$

$$[L]^{B_1}_{B_1} = S^{-1} \cdot [L]^B_B \cdot S$$

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$

CONSIDERO DUE MATRICI QUADRATE $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$: SUPPONGO CHE ESISTE $S \in \mathcal{M}_{n \times n}$ INVERTIBILE, TALE CHE

$B = S^{-1} \cdot A \cdot S \Rightarrow$ LE DUE MATRICI A E B SONO DETTE SIMILI E SCRIVIAMO $A \sim_S B$.

LA SIMILITUDINE TRA MATRICI $n \times n$, È UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA. CIOÈ È:

1) RIFLESSIVA : $A \sim_S A$
2) SIMMETRICA : $A \sim_S B \Rightarrow B \sim_S A$
3) TRANSITIVA : SE $A \sim_S B$ E $B \sim_S C \Rightarrow A \sim_S C$

$$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{n \times n}$$

$\boxed{\text{DA FARE LA DIMOSTRAZIONE}}$

POSSIAMO QUINDI CREARE CLASSI DI EQUIVALENZA: OVVERO SOTTOINSIEMI DI $\mathcal{M}_{n \times n}$ COSTITUITI DA MATRICI SIMILI TRA LORO; CIOÈ SIA $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ SE $[A]$ O $\bar{A}$ È LA CLASSE DI SIMILITUDINE $\Rightarrow [A] = \{B \in \mathcal{M}_{n \times n} \mid \exists S \in \mathcal{M}_{n \times n}$, S INVERTIBILE, TALE CHE $B = S^{-1} A S\}$

L'INSIEME DELLE CLASSI DI EQUIVALENZA DI MATRICI SIMILI, SI CHIAMA INSIEME QUOZIENTE.

OSSERVAZIONE: LE MATRICI ASSOCIATE ALLO STESSO OPERATORE, IN BASE DIVERSA, SONO SIMILI.

OGNI $\underbrace{\text{CLASSE DI EQUIVALENZA}}_{\text{(DI MATRICI SIMILI)}}$ HA QUINDI ASSOCIATO UN OPERATORE.
VEDIAMO QUALI ELEMENTI SONO INVARIANTI PER SIMILITUDINE:

ESEMPIO:

$$L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad [L]_C^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 2x \end{pmatrix} \qquad rg A = 2 \qquad \det A = -2$$

OGNI $B \in M_{2\times 2} \mid B = S^{-1} A S$ HA RANGO 2

PERCHÉ $rg A = \dim(\operatorname{Im} L)$ E $\dim \operatorname{Im} L$ DIPENDE SOLO DALL'APPLICAZIONE LINEARE L.
OGNI ALTRA MATRICE ASSOCIATA AD L HA RANGO 2
QUINDI

OSSERVAZIONE: MATRICI SIMILI HANNO LO STESSO RANGO

MATRICI SIMILI HANNO LO STESSO DETERMINANTE?
VEDIAMO L'ESEMPIO SOPRA: CAMBIO BASE IN $\mathbb{R}^2$ E CERCO $[L]_B^B$
PRENDO IN $\mathbb{R}^2$ LA BASE $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\left.\begin{array}{l} L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{R_1 - R_2 \to R_2}{\sim}$$

$$\overset{R_1 - R_2 \to R_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = [L]_B^B$$

$$\det [L]_B^B = -2 = \det [L]_e^e$$

PROPOSIZIONE

IN GENERALE SE $A \underset{S}{\sim} B$ (IPOTESI) $\Rightarrow$ TESI: $|A| = |B|$

DIMOSTRAZIONE

SE $A \underset{S}{\sim} B \Rightarrow \exists\ S$ INVERTIBILE T.C. $B = S^{-1} A S$

$$\Rightarrow |B| = |S^{-1} A S| = |S^{-1}|\,|A|\,|S| = |S|^{-1}|A|\,|S| =$$

$$= \underbrace{|S|^{-1}|S|}_{=1}|A| = |A| \qquad \text{C.V.D.}$$

VEDIAMO ALTRI INVARIANTI PER SIMILITUDINE:

<u>DEF</u>: SIA A UNA MATRICE QUADRATA $\in \mathcal{M}_{n\times n}$

DICIAMO <u>POLINOMIO CARATTERISTICO</u> DI A, IL DETERMINANTE DELLA MATRICE $A - \lambda I$, CON $\lambda \in \mathbb{R}$

(λ PARAMETRO $\Rightarrow$ VARIABILE DEL POLINOMIO)

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

POLINOMIO CARATTERISTICO DI A È $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = P_A(\lambda)$$

OSSERVAZIONE:

$\deg(P_A(\lambda)) =$ ORDINE DI A (NELL'ESEMPIO: ordine di $A = 2$)

PROPOSIZIONE: SE $A \sim_S B \Rightarrow P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$

DIM: $\exists$ S INVERTIBILE $\mid B = S^{-1}AS$

$$P_B(\lambda) = |B - \lambda I| = |S^{-1}AS - \lambda I| = |S^{-1}AS - \lambda S^{-1}S| =$$
$$= |S^{-1}(AS - \lambda S)| = |S^{-1}(A - \lambda I)S| = |S^{-1}||A - \lambda I||S| =$$
$$= |S|^{-1}|A - \lambda I||S| = |A - \lambda I| = P_A(\lambda).$$ C.V.D.

DEFINIZIONE: LE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO SONO DETTE <u>RADICI</u> <u>CARATTERISTICHE</u>

<u>DEFINIZIONE</u>: UNA MATRICE $A \in M_{n \times n}$ È DETTA <u>DIAGONALIZZABILE</u> SE È SIMILE AD UNA MATRICE DIAGONALE, CIOÈ SE $\exists$ D DIAGONALE ED S INVERTIBILE $\mid D = S^{-1} \cdot A \cdot S$.

TORNIAMO ALLE APPLICAZIONI LINEARI, PER INTERPRETARE GEOMETRICAMENTE LE RADICI CARATTERISTICHE:

SIA $L : V \longrightarrow V$ UN OPERATORE $\Rightarrow$ UN SOTTOSPAZIO DI V, $W \leq V$, È DETTO <u>INVARIANTE</u> PER L SE $L(W) \subseteq W$: QUESTA È UNA DEFINIZIONE.

<u>ESEMPIO</u>: $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

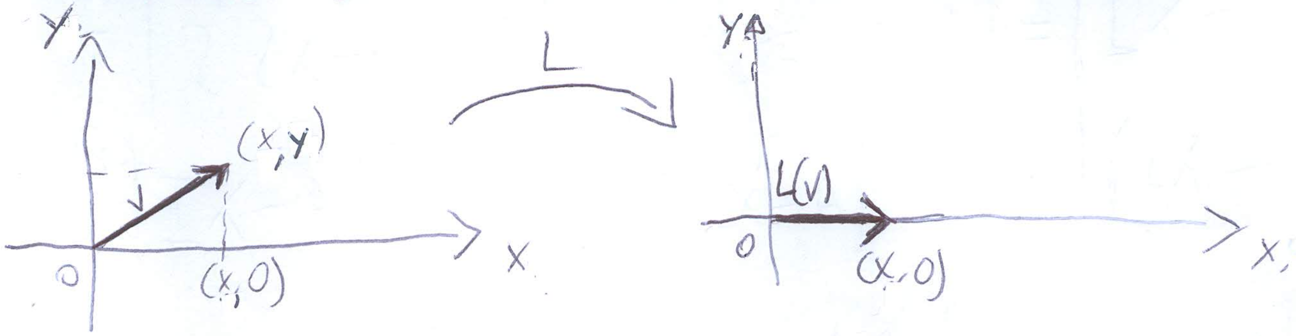
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\{0\} \leq \mathbb{R}^n$ è $\underset{\text{INVARIANTE}}{\text{SOTTOSPAZIO}}$ $\forall L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n \leq \mathbb{R}^n$ è $\underset{\text{INVARIANTE}}{\text{SOTTOSPAZIO}}$ $\forall L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

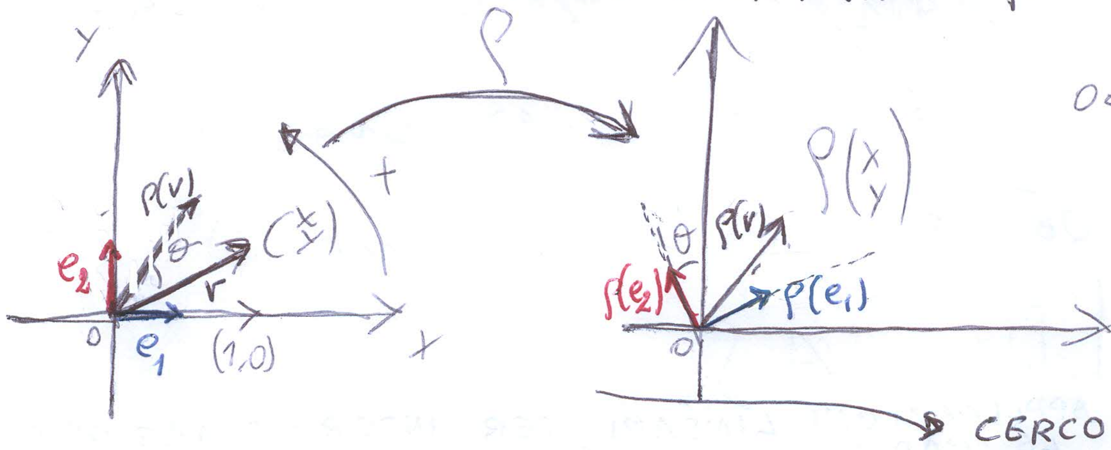
$\{0\}$ e $\mathbb{R}^n$ SONO SOTTOSPAZI INVARIANTI BANALI

CERCHIAMO SOTTOSPAZI INVARIANTI NON BANALI



LA RETTA $y=0$ È UNO SOTTOSPAZIO INVARIANTE DI L NON BANALE: SONO GLI UNICI

ALTRO ESEMPIO: ρ = ROTAZIONE DI ANGOLO ϑ, CON $0<\vartheta<\frac{\pi}{2}$, IN VERSO ANTIORARIO ↶.



$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

CERCO

$$\Rightarrow \rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{pmatrix}$$

$$[\rho]_C^C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

(POICHÉ $\rho\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \cos\vartheta\, e_1 + \sin\vartheta\, e_2$
$\rho(e_2) = -\sin\vartheta\, e_1 + \cos\vartheta\, e_2$)

NON ESISTONO SOTTOSPAZI INVARIANTI NON BANALI.

SE $\theta = \pi$ TUTTE LE RETTE PASSANTI PER $(0,0)$ SONO SOTTOSPAZI INVARIANTI

$$[\rho]_C^C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$