12/03

- FORME → Applicazioni che hanno per dominio un certo spazio e per codominio un CAMPO.
(o FUNZIONALI)

- Definizione: Dato uno spazio vettoriale V definito su un campo K, si definisce FORMA BILINEARE un'applicazione $F: V \times V \to K$ che soddisfa le proprietà:

1) $F((v_1+v_2, w)) = F((v_1, w)) + F((v_2, w))$

$F((\alpha v, w)) = \alpha F((v, w))$

2) $F((v, w_1+w_2)) = F((v, w_1)) + F((v, w_2))$

$F((v, \beta w)) = \beta F((v, w))$

(CONDIZIONI DI BILINEARITÀ)

$\forall v_1, v_2, v, w_1, w_2, w \in V$

$\forall \alpha, \beta \in K$

- Esempio: $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ è FORMA BILINEARE?

1) $F((x_1+x_2, y)) = (x_1+x_2) y$

$F((x_1, y)) + F((x_2, y)) = x_1 y + x_2 y$

} uguaglianza verificata

$F((\alpha x, y)) = \alpha x y$

$\alpha F((x, y)) = \alpha (x y)$

} uguaglianza verificata

2) $F((x, y_1+y_2)) = x(y_1+y_2) = xy_1+xy_2$
$F((x,y_1)) + F((x,y_2)) = xy_1 + xy_2$ } uguaglianza verificata

$F((x, \beta y)) = x\beta y = \beta x y$
$\beta F((x,y)) = \beta x y$ } uguaglianza verificata

Valgono le proprietà sopra definite, F ~~applicazione~~ è ~~lineare~~ FORMA BILINEARE

- F è APPLICAZ. LINEARE? Verifico che:

$$F((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) \overset{?}{=} F((x_1,y_1)) + F((x_2,y_2)) = x_1y_1+x_2y_2$$

$$\|$$

$$F((x_1+x_2, y_1+y_2)) = (x_1+x_2)(y_1+y_2)$$

$\neq$

$\downarrow$

F NON È LINEARE

- Sia $F: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineare, e sia $\dim V = n$

e $B_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base di V

$\Rightarrow$ $v \in V$ si esprime come $\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ e

$w \in V$ è data da $\sum_{i=1}^{n} y_i v_i$

cerco $F((v,w)) = F\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right)\right) =$

esplicito le sommatorie

$$= F\left(\left(x_1v_1 + x_2v_2 + \dots + x_nv_n, \sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right)\right) =$$

$$= F\left(\left(x_1v_1, \sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right)\right) + F\left(\left(x_2v_2, \sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right)\right) + \dots +$$

$$+ F\left(\left(x_nv_n, \sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right)\right) =$$

$$= x_1 F\left(\left(v_1, \sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right)\right) + x_2 F\left(\left(v_2, \sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right)\right) + \dots +$$

$$+ x_n F\left(\left(v_n, \sum_{i=1}^{n} y_i v_i\right)\right) =$$ (esplicito la seconda sommatoria)

CONSIDERANDO LA BILINEARITÀ SULLA SECONDA COMPONENTE, AVREMO

$$= x_1y_1 F((v_1, v_1)) + x_1y_2 F((v_1, v_2)) + x_1y_3 F((v_1, v_3)) +$$

$$\dots + x_1y_n F((v_1, v_n)) + x_2y_1 F((v_2, v_1)) + \dots$$

$$+ x_2y_n F((v_2, v_n)) + \dots + x_ny_1 F((v_n, v_1)) + \dots +$$

$$+ x_ny_n F((v_n, v_n))$$

Ho trovato un polinomio di secondo grado omogeneo nelle coordinate dei due vettori generici: x_j e y_j

- È possibile associare a F una matrice:

Fissata la base $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V determino una MATRICE QUADRATA di ordine n:

$$[F]_{B_V} = \begin{pmatrix} F((v_1,v_1)) & F((v_1,v_2)) & F((v_1,v_3)) & \dots & F((v_1,v_n)) \\ F((v_2,v_1)) & F((v_2,v_2)) & F((v_2,v_3)) & \dots & F((v_2,v_n)) \\ \vdots & & & & \\ F((v_n,v_1)) & F((v_n,v_2)) & \dots & \dots & F((v_n,v_n)) \end{pmatrix}$$

tale che $F((v,w)) = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}^T}_{1\times n} \underbrace{[F]_{B_V}}_{n\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{n\times 1}$ } OTTENGO UNA MATRICE 1×1, CHE È IL POLINOMIO DI 2° GRADO VISTO PRIMA.

ESEMPIO:

- $F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1y_2 - x_1y_1 - 2x_2y_2$$

$$B_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \overset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$$

$1\cdot 1 - 1\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 1$

$$[F]_{B_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} F((v_1,v_1)) & F((v_1,v_2)) \\ F((v_2,v_1)) & F((v_2,v_2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

CONSIDERO le coordinate NELL'ORDINE INDICATO

$x_1y_2 - x_1y_1 - 2x_2y_2$

$2\ 1 - 2\ 1 - 0\ 1$

Nelle base $B_{\mathbb{R}^2}$: $F((v,w)) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$

$= (-2x_1, -2x_1 - 4x_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underline{-2x_1y_1 - 2x_1y_2 - 4x_2y_2}$ ($\neq$ POLINOMIO DI PARTENZA)

MA ESPRIME LA STESSA FORMA BILINEARE

Ora Prendo in $\mathbb{R}^2$ la base $\mathcal{C} \Rightarrow [F]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

Eseguo ancora il prodotto:

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (-x_1, x_1 - 2x_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{-x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_2y_2}$$ (Che e' il polinomio di PARTENZA)

$\Downarrow$

Si può' riottenere solo se la base e' CANONICA

QUINDI LA FORMA BILINEARE ESPRESSA DAL POLINOMIO NELLE COORDINATE DEI VETTORI E' DA RITENERSI RELATIVO ALLA BASE CANONICA.

Si può notare la relazione tra polinomio e matrice:

$$\begin{array}{c|cc} & y_1 & y_2 \\ \hline x_1 & -1 & 1 \\ x_2 & 0 & -2 \end{array} = -x_1y_1 + x_1y_2 - 2x_2y_2$$

SE LA BASE E' CANONICA LE ENTRATE DELLA MATRICE SONO I COEFFICIENTI DEL POLINOMIO

- Esempio $F: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1y_2 - x_1y_1 - 2x_2y_2 - x_3y_1 + \frac{1}{2}x_2y_3$$

$$[F]_{\mathcal{C}} = \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1/2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} y_1 & \quad y_2 & \quad y_3 \end{matrix} \end{array}$$

- Qual'e' il legame tra le matrici determinate dalle due diverse basi? $\left([F]_{B_{\mathbb{R}^2}} \text{ e } [F]_{\mathcal{C}}\right)$

Sia $F: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \dim V = n$

Siano $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$

basi di V

- Un vettore $v \in V$ è espresso nella base B_1 dal vettore $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e w dal vettore $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, cioè:

$$[v]_{B_1} = X \quad \text{e} \quad [w]_{B_1} = Y$$

Sia $A = [F]_{B_1} \Rightarrow F((v,w)) = X^T A Y$

- Nella base B_2 abbiamo $[v]_{B_2} = X'$ e $[w]_{B_2} = Y'$ e

$A' = [F]_{B_2}$. Sappiamo che $\exists$ una matrice INVERTIBILE (MATRICE del CAMBIO di BASE) $S \in M_{n \times n}$

tale che $X' = SX$ e $Y' = SY$

Nella base B_2, $F((v,w)) = (X')^T A' Y' =$

$$= (SX)^T A' (SY) = \underbrace{X^T S^T A' S Y = X^T A Y}$$

Poiché ciò vale $\forall\, v, w \in V$ $\Rightarrow$ l'uguaglianza è vera se $\boxed{S^T A' S = A}$

- **Definizione**: Due matrici $A, B \in M_{n\times n}$ sono dette **congruenti** $\Leftrightarrow \exists\, S \in M_{n\times n}$ invertibile tale che $B = S^T A S$

- **Osservazione**: Matrici associate alla stessa forma bilineare in basi diverse sono **CONGRUENTI**.

- Esercizio: DIMOSTRARE CHE LA RELAZIONE di CONGRUENZA TRA MATRICI QUADRATE È di EQUIVALENZA.

(NB: ogni classe di congruenza ci dà una forma bilineare)

EQUIVALENZA → SISTEMI LINEARI
SIMILITUDINE → APPLICAZ. LINEARI
CONGRUENZA → FORME BILINEARI

- Matrici CONGRUENTI hanno lo stesso DETERMINANTE?

$$|B| = |S^T A S| = |S^T|\,|A|\,|S| = |S|\,|A|\,|S| =$$

$$= |S|^2 |A|$$

Il DETERMINANTE si mantiene a meno di un fattore POSITIVO.
(se $=0$, tutte le matrici della classe hanno det. $=0$)