TEOREMA di GRASSMAN

In uno spazio vettoriale V, n dimensionale siano dati i sottospazi U e W di dimensione p e r rispettivamente. Allora dobbiamo dimostrare che:

$$\dim U + \dim W - \dim (U \cap W) = \dim (U + W)$$

DIMOSTRAZIONE

$p = \dim$ di $U \leq n = \dim U$ e $\dim W = r \leq n$; detta k la $\dim (U \cap W)$

allora $k \leq$ minimo $\{p, r\}$

Sia $v \in U + W = \{v \in V$ tali che $v = u + w$ con $u \in U$ e $w \in W\}$; $v = u + w$ e quindi

Posto $B_U = \{u_1, u_2, \ldots u_p\}$ e $B_W = \{w_1, w_2 \ldots w_r\}$ basi rispettivamente di U e W $\Rightarrow$

$$\Rightarrow v = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^{r} \beta_j w_j$$

Prendo base $B_{U \cap W} = \{v_1, \ldots, v_k\} \Rightarrow$ posso ~~pe~~ aggiungere vettori ~~a~~ di U, linearmente indipendenti fino ad ottenere una base di $U \Rightarrow B_U = \{v_1, \ldots, v_k, u_{k+1} \ldots u_p\}$

Analogamente aggiungo ai vettori di $B_{U \cap W}$ $r-k$ vettori di W linearmente indipendenti ottenendo dunque una base di $W \Rightarrow B_W = \{v_1 \ldots v_k, w_{k+1}, \ldots, w_{k+r}\}$

Dato $v \in U + W \Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_k v_k + \beta_{k+1} w_{k+1} + \cdots + \beta_r w_r$

ora sommiamo: I TERMINI SIMILI

$$= (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_k + \beta_k) v_k + \alpha_{k+1} u_{k+1} + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_{k+1} w_{k+1} + \cdots + \beta_r w_r$$

I vettori $v_1, \ldots, v_k, u_{k+1} \ldots u_p, w_{k+1} \ldots w_r$ generano $U + W$, cioè $U + W = \langle\langle v_1, \ldots, v_k, u_{k+1}, \ldots, u_p, w_{k+1}, \ldots, w_r \rangle\rangle$

MA sono linearmente indipendenti?

$k + p - k + r - k =$

$p + r - k$ n° di generatori di $U + W$

Dimostriamo che tali vettori sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $U + W$:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots a_k v_k + b_{k+1} u_{k+1} + \cdots + b_p u_p + c_{k+1} w_{k+1} + \cdots + c_r w_r = 0$$

devo dimostrare che $a_j = 0 \quad \forall j = 1 \ldots k$

$b_j = 0 \quad \forall j = k+1 \ldots p$

$c_j = 0 \quad \forall j = k+1 \ldots r$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i v_i + \sum_{j=k+1}^{p} b_j u_j}_{\in U} = \underbrace{-\sum_{e=k+1}^{r} c_e w_e}_{\in W} \Rightarrow \text{tale vettore sta in } U \cap W$$

$$\Rightarrow -\sum_{e=k+1}^{r} c_e w_e = \sum_{m=1}^{k} d_m v_m$$

QUINDI SI SCRIVE COME COMBINAZIONE LINEARE DEI VETTORI DELLA BASE DI $U \cap W$

$$\Rightarrow \sum_{\ell=1}^{r} c_\ell w_\ell + \sum_{m=1}^{k} d_m v_m = 0 \Rightarrow$$ poiché l'insieme dei vettori $\{w_{k+1} \ldots w_r, v_1 \ldots v_k\}$ è base di W allora i vettori sono linearmente indipendenti e quindi $c_\ell = 0 \ \forall \ell = k+1, \ldots, r$ e $d_m = 0 \ \forall m = 1, \ldots, k \Rightarrow \odot$

$\odot \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i v_i + \sum_{j=k+1}^{p} b_j u_j = 0 \Rightarrow$ poiché i vettori $\{v_1 \ldots v_k, u_{k+1} \ldots u_p\}$ formano una base di U allora $a_i = 0 \ \forall i = 1, \ldots k$ e $b_j = 0 \ \forall j = k+1, \ldots, p$

$\Rightarrow$ TUTTI I MIEI VETTORI SONO linearmente indipendenti! $\Leftarrow$

allora $\{v_1, \ldots v_k \ u_{k+1} \ldots u_p \ w_{k+1} \ldots w_r\}$ è base di $U + W$

C.V.D

In $\mathbb{R}^4$ due piani (sottospazi vettoriali di dimensione 2) si intersecano sempre o no? Nell'ORIGINE SEMPRE (è il minimo)

SI! Almeno nell'origine e con Teorema di G. dice che:

$$\dim \tilde{\Pi}_1 + \dim \tilde{\Pi}_2 - \dim(\tilde{\Pi}_1 \cap \tilde{\Pi}) = \dim(\tilde{\Pi}_1 + \tilde{\Pi}_2)$$

$2 + 2 - 0 = \dim(\tilde{\Pi}_1 + \tilde{\Pi}_2) = 4$ SI può essere sottospazio di $\mathbb{R}^4$ (sè)

$2 + 2 - 1 = \dim(\tilde{\Pi}_1 + \tilde{\Pi}_2) = 3$ può essere possibile SI

$2 + 2 - 2 = \dim(\tilde{\Pi}_1 + \tilde{\Pi}_2) = 2$ può essere possibile SI

In $\mathbb{R}^3$ due piani si intersecano sempre?? Nell'ORIGINE SEMPRE (MA NON SOLO IN 0!)

$2 + 2 - 0 = \cancel{\dim(\tilde{\Pi}_1 + \tilde{\Pi}_2) = 4}$ NO perché max è 3 dim.

$2 + 2 - 1 = \dim(\tilde{\Pi}_1 + \tilde{\Pi}_2) = 3 \Rightarrow \tilde{\Pi}_1 + \tilde{\Pi} = \mathbb{R}^3$ copre tutto lo spazio

$2 + 2 - 2 = \dim(\tilde{\Pi}_1 + \tilde{\Pi}_2) = 2$ SI

Se $\dim \tilde{\Pi}_1 + \dim r - \dim(\tilde{\Pi} \cap r) = \dim(\tilde{\Pi}_1 + r)$

HO UN PIANO ED UNA RETTA: $2 + 1 - 0 = \dim(\tilde{\Pi}_1 + r) = 3$ SI

$2 + 1 - 1 = \dim(\tilde{\Pi}_1 + r) = \cancel{3}\,2$ SI (è il piano stesso)

Data la retta r di $\mathbb{R}^3$ di equazione CARTESIANA $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ matrice associata è $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ con Rango 2 quindi le due equazioni sono linearm. indipend.

(passa per l'origine)

[È sistema ma non mi dà una retta ma è un piano — se avessi preso $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 4x - 2y + z = 0 \end{cases}$ PERCHÉ IL RANGO DEL SISTEMA È 1!]

equazione PARAMETRICA: poniamo $z = s \Rightarrow \begin{cases} 2x - \cancel{s} + \cancel{s} = 0 - x = 0 \\ y = s \\ z = s \end{cases}$

sx variabili — dx combinazioni lineari dei parametri scelti

Trovare ~~eq.~~ sol. fondamentale : SIGNIFICA TROVARE I VETTORI DI BASE DEL SOTTOSPAZIO

$$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=z \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{c|c||c} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \rightarrow \text{sol fondamentale è } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ BASE della RETTA r

$r = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=s \\ z=s \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{eq. vettoriale della retta } r}$$

Dati U e W sottospazi vettoriali : posto $V=\mathbb{R}^n$, $\dim U = k$ e $\dim W = r \Rightarrow$ L'EQUAZ. DI U È DATA DAL SISTEMA Σ_1 E L'EQUAZIONE DI W DAL SISTEMA Σ_2

$\Sigma_1 : A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$; $\Sigma_2 \quad Bx = 0$

$A \downarrow$ ha n colonne e n-k righe

$B \downarrow$ ha n colonne e n-r righe

? come posso dare l'equazione di $U+W$? E quella di $U \cap W$? E dare le basi di U e W

? Qual'è la base di $U+W$ e di $U \cap W$?

$\downarrow$ una base di $U+W$ è data dai vettori lin. indipendenti fra i $k+r$ delle due basi