In $\mathbb{R}^3$ considero i sottospazi affini:
- punti (dimensione 0 che sono i traslati dell'origine),
- le rette (dimensione 1)
- piani (dimensione 2)
- $\mathbb{R}^3$ stesso, il traslato di se stesso tramite il vettore nullo

Retta in $\mathbb{R}^3$: sistema lineare non omogeneo di due eq. a tre incognite

l'eq. affine (cartesiana) $\Sigma: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$ con $rg\,\Sigma = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2$

Dall'eq. affine si riesce a trovare l'eq. parametrica

Si determina 1 soluzione fondamentale di $\Sigma_0: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$

3 variabili, rango 2 $\Rightarrow$ 1 soluzione fondamentale V_0

$V_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, poi si determina una soluzione particolare di Σ: $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ la soluzione generale di Σ in forma vettoriale e' $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = sV_0 + a$

Vettore traslazione che e' il vettore a che abbiamo determinato

Cioe' $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} x = sx_1 + a_1 \\ y = sy_1 + a_2 \\ z = sz_1 + a_3 \end{cases}}_{\text{forma parametrica delle rette in } \mathbb{R}^3}$

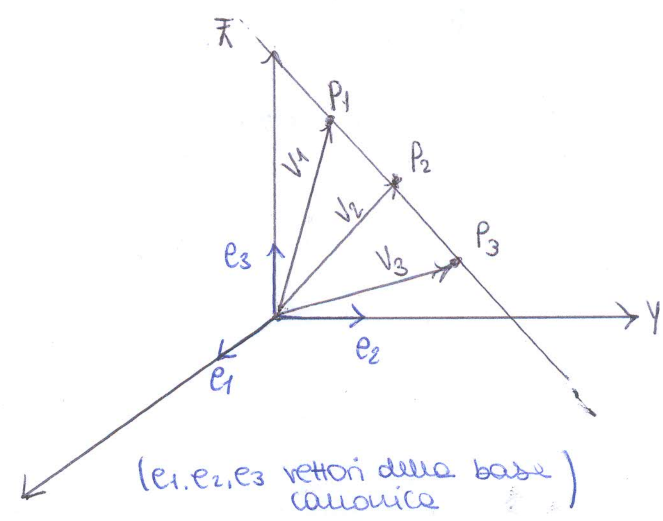
In cui:

$V_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ fornisce la direzione della retta e le sue coordinate sono dette: "Parametri direttori della retta"

Determinare quando TRE punti sono allineati:

$P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ e $P_3(x_3, y_3, z_3)$

i vettori $(V_2 - V_1)$ e $(V_3 - V_2)$ devono essere linearmente DIPENDENTI



(e_1, e_2, e_3 vettori della base canonica) ove' $\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 & z_3 - z_2 \end{pmatrix}$ ha rango 1

<u>ette parallele</u> : $r_1 : X = s \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ $\quad r_2 \; X = s \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

→ Date r_1 e r_2 ⇒ $r_1 \parallel r_2 \iff$ sono traslate dello stesso sottospazio vettoriale e
Quindi $\boxed{\frac{l}{l_1} = \frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1}}$ ovvero sono linearmente dipendenti i vettori $\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$

Date r_1 e r_2 in forma cartesiana:

$$r_1 : \begin{cases} \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = d_1 \\ \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = d_2 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z = d_3 \\ \delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 z = d_4 \end{cases}$$

↓

Sottospazio vettoriale di cui r_1 e' traslazione

$$r_{1,0} \begin{cases} \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0 \\ \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z = 0 \end{cases}$$

↓

Sottospazio vettoriale di cui r_2 e' traslazione

$$r_{2,0} \begin{cases} \gamma_1 x_1 + \gamma_2 y + \gamma_3 z = 0 \\ \delta_1 x + \delta_2 y + \delta_3 z = 0 \end{cases}$$

I due sottospazi devono <u>coincidere</u>

Il che significa:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 \end{pmatrix}$$

il rango di questa matrice deve essere 2 poiché il sottospazio vettoriale deve essere lo stesso

↑

matrice dei coefficienti

Piano in $\mathbb{R}^3$

(sistema lineare non omogeneo)

: sistema definito da un'unica equazione in tre variabili

$\pi: ax + by + cz = d$ ⟵ Eq. di un piano in $\mathbb{R}^3$

$\pi_0: ax + by + cz = 0$ sottospazio di cui π e' traslazione

Si determinano: 2 soluzioni particolari (fondamentali) di π_0 : $v_1 = \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$

1 soluzione particolare di π : $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow r: X = \underbrace{s \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}} + \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{cases} x = s l_1 + t l_2 + a_1 \\ y = s m_1 + t m_2 + a_2 \\ z = s n_1 + t n_2 + a_3 \end{cases}$$

Dati tre punti $P_1 = (1,1,-1)$, $P_2 = (0,2,0)$, $P_3 = (-1,0,-2)$ ⟹ c'e' sempre un piano passante per 3 punti → la cui eq. e' definita a meno di una costante moltiplicativa → L'eq. quindi non e' univoca

Sostituendo le coordinate nell' eq. del piano:

$$\begin{cases} a + b - c = d \\ 2b = d \\ -a - 2c = d \end{cases}$$

3 equazioni e 4 incognite

Risolvendo:

$$\begin{cases} a - c = +d/2 \\ b = d/2 \\ -a - 2c = d \end{cases} \quad \begin{cases} a = c + d/2 \\ b = d/2 \\ c = -\frac{1}{2} d \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{d}{2} \\ c = -\frac{1}{2} d \end{cases}$$

l'equazione e' in funzione di d

$\Rightarrow \frac{d}{2} y - \frac{d}{2} z = d$ Equazione del piano che dipende dalla costante moltiplicativa d

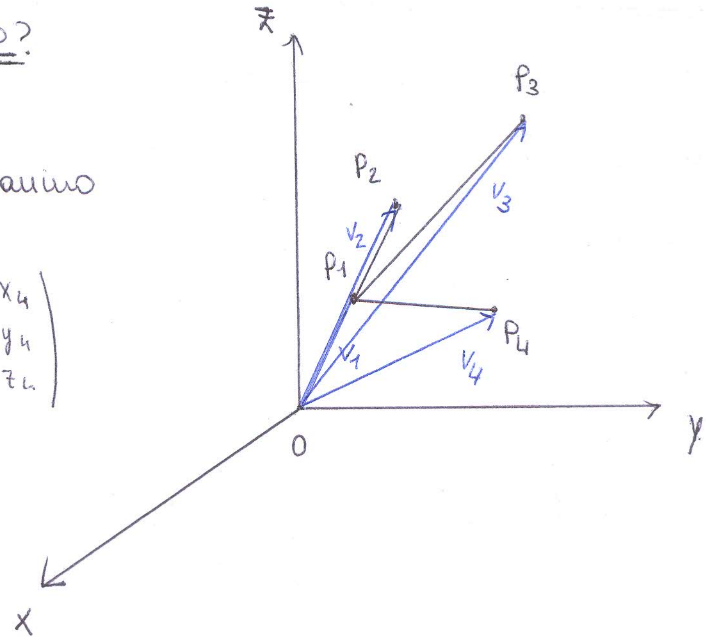
Dando a d il valore 2 per comodità ⟹ $\boxed{y - z = 2}$

↓

Per verificare i calcoli, si sostituiscano le coordinate di P_1, P_2, P_3 nell' eq. del piano e deve essere verificata l'identità

Quando 4 punti stanno sullo stesso piano?

I vettori differenza $(v_2 - v_1), (v_4 - v_1), (v_3 - v_1)$ stanno sulla stessa direzione $\Rightarrow$ i punti stanno sullo stesso piano



Posto $P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}, P_4 = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \end{pmatrix}$

La matrice

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_2 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix}$$

di solito i vettori sono messi in colonna

La matrice deve avere rango 2, i vettori devono essere linearmente DIPENDENTI

$\Downarrow$

Cioe' determinante $= 0$

Ricavo una matrice 4x4 del tipo di cui il determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

facendo il determinante secondo l'ultima colonna, det = 0

Quando due piani sono PARALLELI?

Quando hanno la stessa direzione (o giacitura)

$\pi_1 : a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$

$\pi_2 : a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$

Sono $\pi_1 \parallel \pi_2$ se: $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ sono eq. di uno stesso sottospazio vettoriale

$$rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow$$ i due sottospazi vettoriali coincidono

E quindi $\boxed{\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}}$

Parallelismo retta-piano

la direzione della retta deve essere contenuta nella direzione del piano

$r: X = s\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ e $\pi: ax + by + cz = d$: $\boxed{r \parallel \pi\ ?}$

$r_0: X = s\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\pi_0: ax + by + cz = 0$

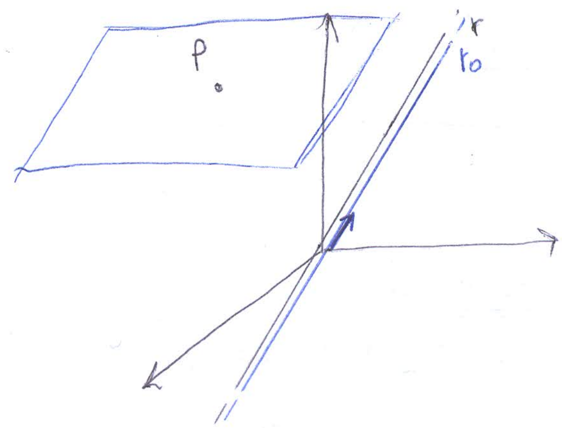
la retta e' contenuta nel piano se $\boxed{al + bm + cn = 0}$

se $\pi: X = s\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ quando $\boxed{r \parallel \pi\ ?}$

Scritto così, π_0 e' $X = s\begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow r \parallel \pi$ quando $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l \\ m_1 & m_2 & m \\ n_1 & n_2 & n \end{pmatrix}$ ha determinante $= 0$

Esercizio: Dare l'equazione del piano π parallelo alla retta $r: \begin{cases} x+y=3 \\ -x-2y+z=1 \end{cases}$ e passante per il punto $P=(1,1,0)$



Prendo $r_0: \begin{cases} x+y=0 \\ -x-2y+z=0 \end{cases}$ Passante per l'origine e $\parallel$ a r

Trovando una soluzione di r_0

$\begin{cases} x=-y \\ z=y \end{cases} \Rightarrow$ Una base di r_0 è $\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

E' anche uno dei vettori di base del piano

$\pi_0: X = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Definito in modo che sia linearmente indipendente con $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\pi: X = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ π è π_0 traslato del punto $P(1,1,0)$

Dato dalle coordinate del punto $P(1,1,0)$

$\mathbb{R}^3$

Fascio di piani nello spazio tridimensionale: è l'insieme delle combinazioni lineari di due piani dati π_1 e π_2:

$\pi_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$
$\pi_2: a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

La sua equazione è: $\lambda(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+\mu(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$

I parametri λ e μ non possono essere contemporaneamente nulli

Preso $\lambda \neq 0$, divido per λ e pongo $\frac{\mu}{\lambda}=t$

$\Rightarrow (a_1x+b_1y+c_1z+d_1)+t(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)=0$ $\Rightarrow$ In questo modo, si perde però un piano, il piano $(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)$

⇒ Valuto il rango del sistema $\Sigma: \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$ A = matrice dei coefficienti

1). se $r_g^A = 2$ ⇒ il rango della matrice completa coincide con il rango della matrice incompleta (ESSENDO MASSIMO)

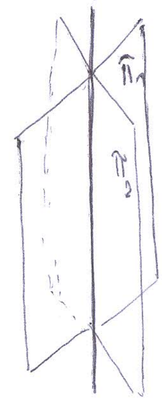
⇓

I due piani si intersecano nello spazio delle soluzioni comuni : 3 variabile, 2 eq ⇒ dim=1 ⇒ RETTA

Sol Σ = retta

E quindi tutti i piani del fascio passano per questa retta r

La retta r e' detta GENERATRICE del fascio e il fascio in questo caso e' detto PROPRIO

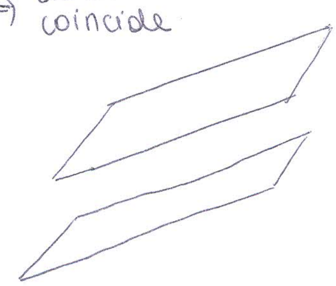


2). se $r_g^A = 1$ ⇒

- $r_g(A:B) = 1$ ⇒ I due piani coincidono ⇒ Non ho un fascio ma ho sempre lo stesso piano ; r
- $r_g(A:B) = 2$ ⇒ Il sistema non ha soluzione e i due piani sono paralleli ⇒ Le loro direzione coincide

↓

Si ottiene un fascio IMPROPRIO



ESERCIZIO : Piano del fascio passante per la retta $r: \begin{cases} x+y=2 \\ 3x-2y-z=0 \end{cases}$ piano passante e per il punto $P(1,2,3)$

$(x+y-2) + t(3x-2y-z) = 0$ ⇒ Eq. del fascio

Fra tutti gli infiniti piani, cerco quello passante per $P = (1,2,3)$

Controllo $3x-2y-z=0$, ma non e' verificata l'uguaglianza

$\Rightarrow \quad 1 + t(3-4-3) = 0$

$1 + t(-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{1}{4}}$

$\Rightarrow (x+y-2) + \frac{1}{4}(3x-2y-z=0$ E trovo il piano