- Prodotto riga e colonna

$(M_{n\times m}(\mathbb{R}), \cdot)$ non è un gruppo, perchè non sempre esiste l'elemento inverso.

In $m_{p\times m}(\mathbb{R})$ possiamo introdurre l'operazione di "Moltiplicazione per uno scalare"

Le coppie sono composte da uno scalare e una matrice.

Così definita data $A \in m_{p\times m}$, $A = (a_{ij})$ $\begin{smallmatrix} i = 1 \dots p \\ j = 1 \dots m \end{smallmatrix}$ e lo scalare $K \in \mathbb{R} \Rightarrow K \cdot A \in m_{p\times m}(\mathbb{R})$ con $K \cdot A = (a_{ij} \cdot k)$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ e $k = -3 \Rightarrow K \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ -12 & -15 & -18 \end{pmatrix}$

(Ogni entrata moltiplicata per K)

- Considero $(m_{p\times m}(\mathbb{R}), +, \cdot K)$ e verifico che siano date le seguenti proprietà:

1) la struttura algebrica $(M_{p\times m}(\mathbb{R}), +)$ deve essere un gruppo commutativo

2) l'operazione $\cdot K$ deve godere delle proprietà: a) associativa cioè $\forall \lambda, K \in \mathbb{R}$ e $\forall A \in m_{p\times m}(\mathbb{R})$ si ha $(\lambda \cdot K) \cdot A = \lambda (K \cdot A)$

b) $\exists$ elemento neutro, $K = 1$, in quanto $1 \cdot A = A$ $\forall A \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$

3) Vale la proprietà distributiva del prodotto per uno scalare rispetto alla somma di matrici

cioè $K \cdot (A+B) = K \cdot A + K \cdot B$ $\forall K \in \mathbb{R}$, $A, B \in m_{p\times m}$

$\Rightarrow$ Verificate le precedenti proprietà $(m_{p\times m}(\mathbb{R}), +, \cdot K)$ è detto "Spazio Vettoriale"

IN PARTICOLARE È SPAZIO VETTORIALE SUL CAMPO $\mathbb{R}$.

Definizione: Data una matrice $A \in M_{p\times m}$ si dice "Trasposta" di A e la si indica con A^T ($A^t, A^T, {}^tA, A'$) la matrice $A^T \in M_{n\times p}$ tale che $A^T = (b_{ij}) = (a_{ji})$
3×2 $\quad i=1..n,\ j=1..p \quad j=1..p,\ i=1..n$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

A $\begin{array}{l} i = 1,2 \text{ righe} \\ j = 1,2,3 \text{ colonne} \end{array}$

$b_{11} = a_{11} \quad b_{12} = a_{21}$
$b_{21} = a_{12} \quad \ldots$

In $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ (matrice quadrata) posso definire la matrice "Simmetrica": $A \in M_{n\times n}$ è detta simmetrica se $A = A^T$

Teoria dei Determinanti

Lagrange → Metodo generale

Data una matrice $M_{n\times n}$ vogliamo definire il suo determinante. Lo definiamo per induzione su n
↓
si basa sul quinto assioma di Peano

V Assioma di Peano: Dato $A \subseteq \mathbb{N}$ (sottoinsieme) tale che $0 \in A$ e se $n \in A \Rightarrow n+1 \in A \Rightarrow A \equiv \mathbb{N}$

Sia $P(n)$ una proposizione che vogliamo dimostrare e sia $A = \{n \in \mathbb{N}$ per i quali $P(n)$ è vera$\}$, EVIDENTEMENTE $A \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow$; se $0 \in A$ (cioè verifico che $P(0)$ è vera)

e se $\underbrace{P(n) \text{ è vera}}_{(Ip)} \Rightarrow \underbrace{P(n+1) \text{ è vera}}_{(Tesi)}$ ⇒ per il V assioma di Peano $A \equiv \mathbb{N}$ E QUINDI LA PROPOSIZIONE È DIMOSTRATA $\forall n \in \mathbb{N}$
↓
coincide

Si sostituisce $0 \in A$ con il numero naturale più piccolo CHE POSSA ESSERE SOSTITUITO AD n,

$$1+2+3+4+\dots+n = \frac{(n+1)n}{2}$$ (Trovare e dimostrare metodo generale)

$1+2=3$ $\qquad$ $1+2+3=6$

$\frac{2\cdot 3}{2}=3$ $\qquad$ $\frac{3\cdot 4}{2}=6$

1) Verifica per il più piccolo $n \in \mathbb{N}$ possibile

(Potrebbe essere $n=0 \Rightarrow 0=0$ vero)

$n=0$ vera

($n=1$ $\quad 1=\frac{2\cdot 1}{2}$ vera : ANCHE SE BASTA LA VERIFICA PER $n=0$)

2) Dimostrazione vera e propria

Supposta vera fino a $n=k$, la dimostro per $n=k+1$

devo dimostrare questa uguaglianza $1+2+3+\dots+k+(k+1)=$

$$=\frac{((k+1)+1)(k+1)}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2} \Rightarrow (1+2+3+\dots+k+(k+1)) =$$

$$= (1+2+3+\dots+k)+(k+1) = \frac{(k+1)k}{2}+(k+1) = \frac{(k+1)k+2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{((k+1)+1)(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Definiamo il determinante di una matrice "quadrata" $n \times n$ per induzione su n. (si può fare solo con le matrici quadrate)

per $n=1$ $A \in \underset{1\times 1}{M}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \Rightarrow A = a \Rightarrow$ definisco il determinante di A, che indico con det A, Det A, $|A|$, $[A]$, $\|A\|$,

una matrice 1×1 è un numero reale

in questo modo $|a| = a$

per $n=2$ Esempio $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A| =$

scegliamo una riga (o una colonna) di A ad esempio la 1° riga, ~~per~~ $\Rightarrow |A| = (-1)^{1+1} a \cdot |d| + (-1)^{1+2} b \cdot |c| = *$

(prima riga e prima colonna)

(determinante)

Si toglie la i riga e la j colonna su cui si TROVA L'ENTRATA a_{ij} di A: otteniamo matrici quadrate più piccole, CHE SONO SOTTOMATRICI.

$* = a \cdot d - b \cdot c$

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$

per $n=3$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + ①$

1° riga

Togliere la prima riga e la prima colonna $A = \begin{pmatrix} \cancel{} & & \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
e si ottiene una matrice più piccola 2×2

① $+ (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Esempio $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

MATRICE OTTENUTA DA A TOGLIENDO LA PRIMA RIGA E LA SECONDA COLONNA

SCELGO DI SVILUPPARE IL DETERMINANTE SECONDO LA 1^a RIGA:

$$\Rightarrow |A| = (-1)^{1+1} \cdot \underset{a_{11}}{(-1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot \underset{a_{12}}{1} \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot \underset{a_{13}}{(-2)} \cdot \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

matrice quadrata 2x2 (guardare $n=2$) OTTENUTA DA A TOGLIENDO LA 1^a RIGA E LA 1^a COLONNA

MATRICE OTTENUTA DA A TOGLIENDO LA 1^a RIGA E LA 3^a COLONNA

$$= -1-\sqrt{2}-2\cdot(\sqrt{2}+1) = -1-\sqrt{2}-2\sqrt{2}-2 = \boxed{-3-3\sqrt{2}}$$

SVILUPPIAMO IL DETERMINANTE DI A SECONDO LA 3^a colonna:

$$|A| = (-1)^{1+3}(-2)\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \cancel{(-1)^{2+3}\cdot 0} \cdot |*| + (-1)^{3+3}\cdot 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(\sqrt{2}+1) + (-1-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}-2-1-\sqrt{2} = \boxed{-3-3\sqrt{2}}$$

IL DETERMINANTE NON DIPENDE DALLA RIGA O DALLA COLONNA SCELTA PER CALCOLARLO.