- **OPERATORI SIMMETRICI** su uno spazio euclideo

Definizione: $T: V \to V$ V spazio euclideo n-dimensionale, T operatore è detto simmetrico se $\forall u, v \in V$
$T(u)\cdot v = u \cdot T(v)$

(T^* è operatore aggiunto di T operatore su V euclideo se $T(u)\cdot v = u \cdot T^*(v)$ $\forall u, v \in V$
$\to$ Se T è isometrico $T^* = T^{-1}$
$\to$ Se T è simmetrico $T^* = T$)

Proposizione: Data una base ortonormale $B_{\perp n}$ di $V \Rightarrow [T]_{B_{\perp n}} = A$ è simmetrica

Dimostrazione: Data la base $B_{\perp n}$ in V, fissati v e $u \in V$, siano $X = [u]_{B_{\perp n}}$ e $Y = [v]_{B_{\perp n}} \Rightarrow [T(u)]_{B_{\perp n}} = [T]_{B_{\perp n}} \cdot X = $
$= AX$ e $[T(v)]_{B_{\perp n}} = AY$
Sappiamo che T è simmetrico $\Rightarrow T(u)\cdot v = u \cdot T(v)$
$\Rightarrow (AX)^T \cdot I\,Y = X^T \cdot I \cdot AY \Rightarrow X^T A^T Y = X^T A Y \Rightarrow A^T = A$
$\uparrow$ vera $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$
c.v.d

Proposizione: Se $U < V$ è invariante per T operatore simmetrico $\Rightarrow U^\perp$ è sottospazio invariante per T

Dimostrazione: Sia $u \in U \Rightarrow T(u) \in U$, essendo T simmetrico, preso $w \in U^\perp$ si sa che $T(u)\cdot w = u \cdot T(w) \Rightarrow$ essendo $T(u)\cdot w = 0 \Rightarrow u \cdot T(w) = 0 \Rightarrow T(w) \in U^\perp \Rightarrow U^\perp$ è invariante per T

Proposizione: Autovettori relativi ad autovalori diversi di un operatore simmetrico, sono ortogonali.

Dimostrazione: Siano λ_1, λ_2 autovalori di T, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow T(v_1) = \lambda_1 v_1$ e $T(v_2) = \lambda_2 v_2 \Rightarrow$ poiché T è simmetrico:

$$T(v_1) \cdot v_2 = v_1 \cdot T(v_2)$$

$$\overset{\shortparallel}{(\lambda_1 v_1)} \cdot v_2 = v_1 \cdot \lambda_2 v_2 \Rightarrow \lambda_1 v_1 \cdot v_2 = \lambda_2 v_1 \cdot v_2 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) v_1 \cdot v_2 = 0.$$

$\Rightarrow$ essendo $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, $v_1 \cdot v_2 = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2$

c.v.d.

Proposizione: Gli autovalori di un operatore simmetrico sono reali.

Dimostrazione: Sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operatore simmetrico. Fissata una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, $B_{\perp n}$, sia $[T]_{B_{\perp n}} = A \Rightarrow$ il polinomio caratteristico di A sarà $|A - \lambda I|$ e suppongo che $\exists\, \lambda_0$ radice caratteristica con $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow (A - \lambda_0 I)X = 0$ e pongo z_0 soluzione complessa del sistema $\Rightarrow z_0 \in \mathbb{C}^n$, sia $\overline{z_0}$ il suo complesso coniugato $\Rightarrow T(z_0) \cdot \overline{z_0} = z_0 \cdot T(\overline{z_0}) \Rightarrow \lambda_0 z_0 \cdot \overline{z_0} = z_0 \cdot T(\overline{z_0})$;

ma $T(\overline{z_0})$ $\quad \overline{T(z_0)} = \overline{\lambda_0 z_0} = \overline{\lambda_0}\, \overline{z_0}$

$$\overset{\shortparallel}{A \overline{z_0}} = \overline{A}\,\overline{z_0} = \overset{\shortparallel}{\overline{A z_0}}$$

[ESEMPIO: infatti: $\overline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ PERCHÉ A È REALE]

quindi $z_0 \cdot T(\overline{z_0})$

$$\overset{\shortparallel}{z_0 \cdot (\overline{\lambda_0}\, \overline{z_0})} = \overline{\lambda_0} (z_0 \cdot \overline{z_0}) \Rightarrow \lambda_0 (z_0 \cdot \overline{z_0}) - \overline{\lambda_0} (z_0 \cdot \overline{z_0}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda_0 - \overline{\lambda_0})(z_0 \cdot \overline{z_0}) = 0$$

Poiché z_0 è autovettore $\Rightarrow z_0 \cdot \overline{z_0} \neq 0 \Rightarrow \lambda_0 - \overline{\lambda_0} = 0$, cioè $\lambda_0 = \overline{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 \in \mathbb{R}$ C.V.D.

- **TEOREMA DI STRUTTURA** per gli operatori simmetrici

Dato $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ operatore simmetrico, $\exists$ una base ortonormale $B_{\perp n}$ di $\mathbb{R}^n$ | $[T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & & 0 \\ \vdots & 0 & \lambda_3 & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Dimostrazione per induzione su n = dimensione spazio ambiente:

1) Verifica per $n=1 \to T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sarà $T(x) = ax$ $\Rightarrow [T]_C = (a)$: VERIFICATA

2) Dimostriamo la proposizione per $\dim V = n$, supponendola dimostrata per spazi fino alla dimensione $n-1$

Sia $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ simmetrico: sia λ_0 autovalore di T e v_0 un suo autovettore $\Rightarrow \mathcal{U} = \langle\langle v_0 \rangle\rangle$ è un sottospazio di $\dim = 1$ invariante per $T \Rightarrow \mathcal{U}^\perp = \langle\langle v_0^\perp \rangle\rangle$ è invariante per T e $\dim \mathcal{U}^\perp = n-1 \Rightarrow$ considero $T|_{\mathcal{U}^\perp} : \mathcal{U}^\perp \to \mathcal{U}^\perp$, (il dominio e il codominio saranno il sottospazio stesso) che è ancora un operatore simmetrico.

Per ipotesi induttiva, $\exists\, \tilde{B}_{\perp n}$ di $\mathcal{U}^\perp$ tale che $[T|_{\mathcal{U}^\perp}]_{\tilde{B}_{\perp n}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ prendo come base di $\mathbb{R}^n$, $B_{\perp n} = \left\{ \frac{v_0}{\|v_0\|} \right\} \cup \tilde{B}_{\perp n}$ e

$$[T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & & \lambda_{n-1} \end{pmatrix}$$ c.v.d.

<u>Osservazione</u>: Presa in $\mathbb{R}^n$ la base canonica $\Rightarrow [T]_C = A$ è simmetrica reale $\Rightarrow$ abbiamo dimostrato che <u>ogni matrice simmetrica reale è ortogonalmente diagonalizzabile</u>, cioè $\exists\, D$ matrice diagonale e S matrice ortogonale tali che: $D = S^{-1} A S$.

<u>Proposizione</u>: Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è ortogonalmente diagonalizzabile $\Rightarrow$ A è simmetrica.

<u>Dimostrazione</u>: $\exists\, D$ matrice diagonale ed S matrice ortogonale $|\ D = S^{-1} A S \Rightarrow A = S D \underbrace{S^{-1}}_{= SDS^T} \Rightarrow A^T = (S D S^{-1})^T =$

$= (S D S^T)^T = (S^T)^T D^T S^T = S D S^T = A. \Rightarrow A^T = A$

c.v.d.

<u>OSSERVAZIONE</u>

→ La matrice associata A ad una forma quadratica è simmetrica $\Rightarrow$ ora sappiamo che è ortogonalmente diagonalizzabile, cioè $A = S D S^{-1}$, S ortogonale, ma essendo $S^{-1} = S^T$ abbiamo anche $A = S D S^T$, cioè D è congruente ad $A \Rightarrow$ è associata alla forma canonica della forma quadratica iniziale

DA UN PUNTO DI VISTA GEOMETRICO:

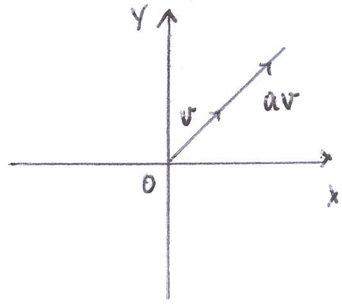
- $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

  $x \mapsto ax$ → **OMOTETIA** (dilatazione o contrazione di rapporto a) in un'unica direzione

- $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \Rightarrow [T] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow$ Se $a=b \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI$

  ||

  OMOTETIA di rapporto a



$\Rightarrow$ Se $a \neq b$ = **OMOTETIA** lungo le direzioni del sistema di riferimento