22/05/17

Teorema: $\exists\, B_{\perp n}$ di $\mathbb{R}^n$ t.c. $[T]_{B_{\perp n}} = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}+1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix}M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_\ell\end{matrix} \end{array}\right)$ con $M_j = \begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta\end{pmatrix}$, $0 < \vartheta_j < \pi$

Nota: esistono operatori isometrici che non hanno radici reali (es. rotazione di angolo ϑ).

Per $n=3$: gli operatori isometrici sono:

$I = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; $A_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$; $A_2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix} = -I$;

matrici diagonali trovate diagonalizzando la matrice ortogonale iniziale, data in una base orto-normale; i suoi unici autovalori sono $+1$ e -1. La matrice iniziale deve essere simmetrica. Se non è diagonalizzabile (e non simmetrica) ho altri due casi:

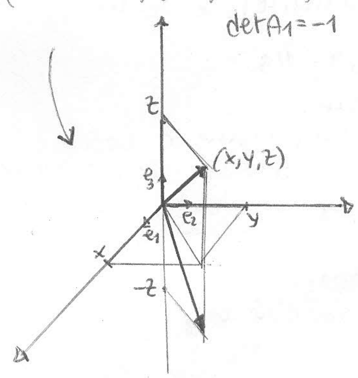
$A_4 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\vartheta&-\sin\vartheta\\0&\sin\vartheta&\cos\vartheta\end{pmatrix}$; $A_5 = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\vartheta&-\sin\vartheta\\0&\sin\vartheta&\cos\vartheta\end{pmatrix}$.

Queste matrici sono ortogonali? Devo controllare o 1) $AA^T = I = A^TA$ o 2) che i vettori riga e quelli colonna siano orto-normali (ovvero ortogonali tra loro e normalizzati). Secondo il metodo 2) si può facilmente verificare che sono ortogonali. (Nota: non si può usare il determinante, poiché se una matrice è ortogonale il suo determinante è ± 1, ma non vale il viceversa).

Cerco le trasformazioni corrispondenti alle matrici: I CORRISPONDE ALL'IDENTITÀ;

A_1 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\-z\end{pmatrix}$

$\det A_1 = -1$



SIMMETRIA O RIBALTAMENTO RISPETTO A UN PIANO: IN QUESTO CASO IL PIANO $z=0$

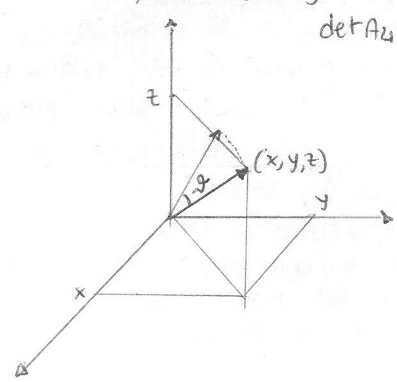
A_2 = caso particolare di A_4 per $\vartheta = \pi$.

A_3 = caso particolare di A_5 per $\vartheta = \pi$.

Inoltre I può essere considerata un caso particolare di A_4 con $\vartheta = 0$.

A_4 $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\vartheta&-\sin\vartheta\\0&\sin\vartheta&\cos\vartheta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\\cos\vartheta\, y - \sin\vartheta\, z\\\sin\vartheta\, y + \cos\vartheta\, z\end{pmatrix}$

$\det A_4 = 1$



ROTAZIONE DI ANGOLO ϑ NEL PIANO $x=0$

$A_4 = [T]_{B_{\perp n}} \Rightarrow$ l'asse x' coincide con l'asse x, ed è l'asse di rotazione: tutti i punti ruotano di un angolo ϑ rimanendo su piani perpendicolari all'asse; questi piani sono tutti paralleli tra loro $\Rightarrow$ per individuarli basta dare la loro direzione, ovvero il sottospazio vettoriale. Anche il verso di rotazione è unico per tutti i punti, e va individuato di caso in caso.

$A_5 = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&\cos\vartheta&-\sin\vartheta\\0&\sin\vartheta&\cos\vartheta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\vartheta&-\sin\vartheta\\0&\sin\vartheta&\cos\vartheta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

La seconda matrice è una simmetria (ha determinante -1) rispetto al piano $x=0$. A_5 infatti ha determinante -1, poiché è composizione di un ribaltamento e una rotazione.

Esercizio: Sia $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{pmatrix}$; supponiamo che sia la matrice associata ad un operatore T in base canonica, con $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Che trasformazione è? Devo vedere se T è isometrico, ovvero (poiché è in base canonica) verificare se A è ortogonale. Verifico se $AA^T = I = A^TA$ (se devo verificare se i vettori siano ortogonali, non mi serve moltiplicare per $1/3$; se devo verificare invece che siano ortonormali, devo moltiplicare per $1/3$). Sì, A è ortogonale $\Rightarrow$ $\Rightarrow T$ è isometrico. A però non è simmetrica, dunque non diagonalizzabile, $\Rightarrow T$ è una rotazione oppure una composizione, comunque non una simmetria pura.

Per sapere se è una rotazione o una composizione, devo trovare il determinante:
se $\det A = 1$ è una rotazione, se $\det A = -1$ è una composizione (N.B. devo moltiplicare per 1/3). $\det A = 1 \Rightarrow A$ è la matrice di una rotazione.

- Cerco l'asse di rotazione, ovvero quello i cui punti non cambiano: è l'autospazio relativo all'autovalore +1: $(A - \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\lambda}} I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (la matrice deve avere rango 2, devo trovare una retta).

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & -2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$ asse di rotazione (sempre in base canonica)

- Quali sono i piani di rotazione? Sono tutti paralleli tra loro e al piano perpendicolare alla retta data. Dunque basta trovare i parametri direttori dell'asse e porli come coefficienti nell'equazione del piano. Parametri direttori dell'asse di rotazione:
Trovo la forma parametrica: $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ i parametri direttori sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ Il piano di rotazione (ovvero la direzione dei piani di rotazione) è π: $x + z = 0$

- Cerco l'angolo di rotazione: so che troverò una base $B_{\perp n}$ t.c. $[T]_{B_{\perp n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = B$

Il primo vettore della base è un vettore lungo l'asse di rotazione, ovvero è uno degli autovettori, e, poiché la base è orto-normale, è un versore dell'asse di rotazione.
Il secondo vettore di base sarà preso nel piano di rotazione e dovrà essere normalizzato.
Il terzo vettore di base sarà preso anch'esso nel piano di rotazione (così da essere ortogonale al primo), ortogonale al secondo vettore e normalizzato.
Ho trovato $B_{\perp n} = \{v_1, v_2, v_3\}$
$A \sim B$ poiché sono associate allo stesso operatore $\Rightarrow B = S^{-1}AS$ con $S = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$

Poiché S è ortogonale, $S^{-1} = S^T$. In questo modo trovo B (numericamente), e se ho il coseno e il seno di ϑ, ho ϑ, ovvero l'angolo di rotazione.
Oppure: poiché $A \sim B$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 + 2\cos\vartheta \Rightarrow \cos\vartheta = 1/3$
Ma non conosco il seno, dunque non conosco il verso di rotazione.

- Cerco il verso della rotazione: cerco il segno del determinante della matrice così formata: la prima colonna è data dalle coordinate di un vettore dell'asse di rotazione (normalizzato o meno); la seconda colonna dalle coordinate di un vettore sul piano di rotazione (qualsiasi). la terza colonna è formata dalle coordinate dell'immagine del vettore scelto nel piano. $\Rightarrow$ Se il determinante di questa matrice è positivo $\Rightarrow$ la rotazione è positiva (verso antiorario); se il determinante è negativo $\Rightarrow$ la rotazione è negativa (verso orario).