30/11/16

ESEMPIO:

$L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3y+2z \\ 2x+2y \end{pmatrix}$

FISSIAMO LA BASE DEL DOMINIO $B_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

E UNA BASE $B_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

CERCO $[L]_{B\mathbb{R}^3}^{B\mathbb{R}^2} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ → ESSENDO TRE I VETTORI DELLA BASE $\mathbb{R}^3$

COORDINATE BASE $\mathbb{R}^2$

Se $L: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \Rightarrow [L]_{B\mathbb{R}^m}^{B\mathbb{R}^p} \in M_{p \times m}(\mathbb{R})$

LA SUA PRIMA COLONNA È FORMATA DAI COEFFICIENTI DELLA COMBINAZIONE LINEARE CHE ESPRIME L'IMMAGINE DEL PRIMO VETTORE DI $B\mathbb{R}^3$ NELLA BASE $B\mathbb{R}^2$

$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = -2 \end{cases}$

I COLONNA

$[L]_{B\mathbb{R}^3}^{B\mathbb{R}^2} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \Rightarrow [L]_{B\mathbb{R}^3}^{B\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -4 \\ 1 & 7/2 & 9/2 \end{pmatrix}$

UGUALE PER LA SECONDA COLONNA

$L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 = 3 \\ -\beta_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_2 = 7/2 \\ \beta_1 = -4 \end{cases}$

E ADESSO LA TERZA COLONNA

$L\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 + 2\gamma_2 = 5 \\ -\gamma_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_2 = 9/2 \\ \gamma_1 = -4 \end{cases}$

ABBIAMO:

$$\boxed{[L]_{B_{DOMINIO}}^{B_{CODOMINIO}} \cdot [v]_{B_{DOMINIO}} = [L(v)]_{B_{CODOMINIO}}}$$

$L: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ CONSIDERO NEGLI SPAZI VETTORIALI LE BASI CANONICHE

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3y+2z \\ 2x+2y \end{pmatrix}$

CERCO $[L]_{C\mathbb{R}^3}^{C\mathbb{R}^2} \Rightarrow L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases}$

$L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 3 \\ \beta_2 = 2 \end{cases}$

$L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = 2 \\ \gamma_2 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$ → CASO PARTICOLARE

②

HO APPENA DEFINITO UN'APPLICAZIONE $\phi: \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) \longrightarrow \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{R})$
CHE FISSATE DELLE BASI NEGLI SPAZI VETTORIALI ASSOCIA AD UN'APPLICAZIONE LINEARE L UNA MATRICE $[L]^{B\mathbb{R}^p}_{B\mathbb{R}^m}$

$L \longrightarrow [L]^{B\mathbb{R}^p}_{B\mathbb{R}^m}$ $\Rightarrow$ FISSATE LE BASI TALE MATRICE È UNICA!

DATA $A \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{R})$, POSSO DETERMINARE UN'APPLICAZIONE LINEARE
$L_A: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ TALE CHE $[L_A]^{B\mathbb{R}^p}_{B\mathbb{R}^m} = A$? LA RISPOSTA È SÌ: $L_A: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \longrightarrow A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

LA CORRISPONDENZA DATA È BIUNIVOCA E PERTANTO, FISSATE LE BASI NEGLI SPAZI VETTORIALI, UN'APPLICAZIONE LINEARE È INDIVIDUATA COMPLETAMENTE DALLA MATRICE ASSOCIATA E VICEVERSA

N.B. LE COLONNE LINEARMENTE INDIPENDENTI DELLA MATRICE, FORMANO LA BASE DELL'IMMAGINE DELL'APPLICAZIONE ASSOCIATA

INFATTI: $L(v) = L\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j L(v_j)$ es. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = A$

$\Rightarrow L(v_j)$ GENERANO L'IMMAGINE DI L : $\text{rg}\, A = 2 \Rightarrow \dim \text{Im}L = 2$ e $B_{\text{Im}L} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

L è INIETTIVA? DETERMINIAMO $\text{Ker}L$

DIM $\text{Ker}L$ + DIM $\text{Im}L$ = DIM DOMINIO DI L

DIM $\text{Ker}L$ = $3 - 2 = 1$ L NON È INIETTIVA PERCHÉ $\text{Ker}L$ NON CONTIENE SOLO L'ORIGINE

$$\text{Ker}L = \{ v \in \text{DOMINIO } L \text{ TALI CHE } L(v) = 0 \} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \Rightarrow$$

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3y + 2z = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} : \underline{\text{KER}L}$$

PER DETERMINARE IL NUCLEO DI L, RISOLVIAMO IL SISTEMA LINEARE OMOGENEO ASSOCIATO ALLA MATRICE $[L]^{B_{\text{cod.}}}_{B_{\text{Dom}}}$

CONSIDERIAMO $L_1 : V \to W$ e $L_2 : W \to U$ APPLICAZIONI LINEARI.

FISSIAMO LE BASI $B_V, B_W, B_U \Rightarrow$ HO LE MATRICI ASSOCIATE $[L_1]_{B_V}^{B_W}$ e $[L_2]_{B_W}^{B_U}$

POSSO COMPORRE E OTTENGO $L_2 \circ L_1 : V \to U$ ed è ANCORA LINEARE:

QUINDI è ASSOCIATA AD ESSA LA MATRICE $[L_2 \circ L_1]_{B_V}^{B_U}$ C'È UN LEGAME TRA LE TRE MATRICI? $(L_2 \circ L_1)(v) = L_2(L_1(v)) =$

$$= L_2(L_1(v)) \Rightarrow [L_2]_{B_W}^{B_U} \cdot [L_1(v)]_{B_W} = [L_2 \circ L_1]_{B_V}^{B_U} [v]_{B_V}$$

$$[L_2]_{B_W}^{B_U} \cdot \underbrace{[L_1]_{B_V}^{B_W} \cdot [v]_{B_V}} \quad \text{VERA } \forall v \in V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [L_2 \circ L_1]_{B_V}^{B_U} = [L_2]_{B_W}^{B_U} \cdot [L_1]_{B_V}^{B_W}$$

Se $L : V \to W$ è BIETTIVA E LINEARE $\Rightarrow \exists L^{-1} : W \to V$ LINEARE FISSATE LE BASI B_V e B_W DATA $[L]_{B_V}^{B_W}$ COME È FATTA $[L^{-1}]_{B_W}^{B_V}$?

SAPPIAMO CHE $L \circ L^{-1} = \mathrm{ID}_W$ e $L^{-1} \circ L = \mathrm{id}_V \Rightarrow [L \circ L^{-1}]_{B_W}^{B_W} = [\mathrm{id}_W]_{B_W}^{B_W}$ e

$\mathrm{id}\ W \to W$, $w \to w$; $\mathrm{id}\ V \to V$, $v \to v$; $[\mathrm{id}_W]_{B_W}^{B_W} = I$

PERCHÉ LE BASI NEL DOMINIO E NEL CODOMINIO SONO LE STESSE

$$[L^{-1} \circ L]_{B_V}^{B_V} = [\mathrm{id}_V]_{B_V}^{B_V} = I$$

INFATTI! Se $B_V = \{v_1, \dots, v_n\} \Rightarrow$ cerco $\boxed{\mathrm{id}(v_1)}$ (PRIMA COLONNA) $= v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \dots + 0 \cdot v_n$ → PERCHÉ LA BASE DEL DOMINIO COINCIDE CON LA BASE DEL CODOMINIO

$\mathrm{id}(v_2) = v_2 = 0 v_1 + 1 v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$ etc...

$$[L \circ L^{-1}]_{B_W}^{B_W} = [L]_{B_V}^{B_W} \cdot [L^{-1}]_{B_W}^{B_V} = I$$

→ QUINDI è L'INVERSA DI $[L]_{B_V}^{B_W}$

CIOÈ

$$\boxed{[L^{-1}]_{B_W}^{B_V} = \left([L]_{B_V}^{B_W}\right)^{-1}}$$