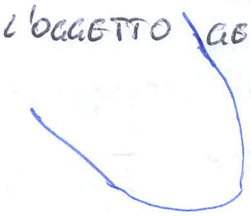
29/05/17

STUDIARE IL LUOGO DEI PUNTI IN $\mathbb{R}^n$

ESEMPIO: $x^2+2xy-3y^2+2x-y+5=0$ (LAVORIAMO IN UNO SPAZIO DI DIMENSIONE 2)

EQ. DI 2° GRADO CHE DEFINISCE UNA CONICA

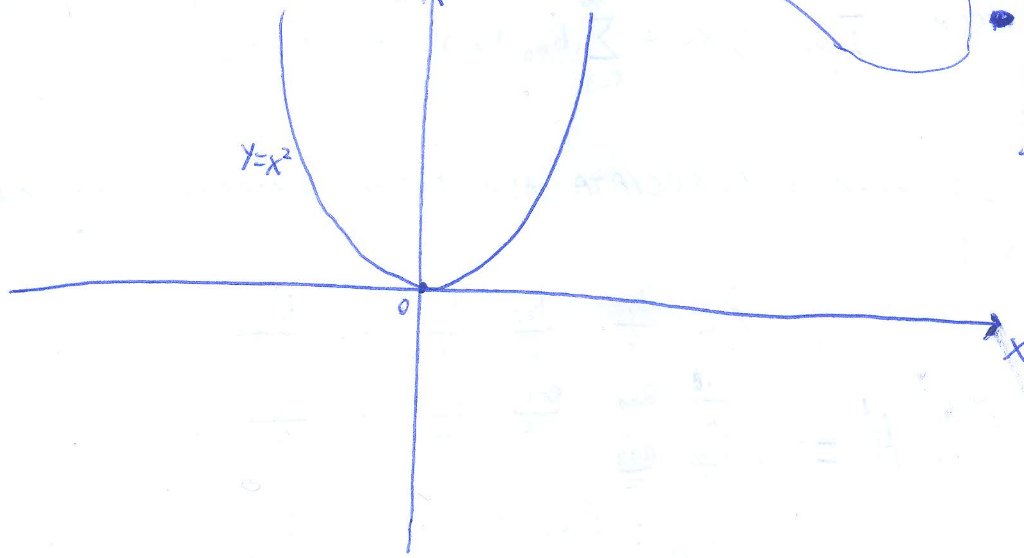
LA DIFFERENZA TRA LA DIMENSIONE DEL DOMINIO E DELL'OGGETTO GEOMETRICO INDIVIDUATO DALLA/E EQUAZIONE/I, É DETTA CODIMENSIONE. (PARI AL NUMERO MINIMO DELLE EQUAZIONI CHE DEFINISCONO L'OGGETTO GEOMETRICO)



$x^2+2xy-3y^2+2x-y+5$

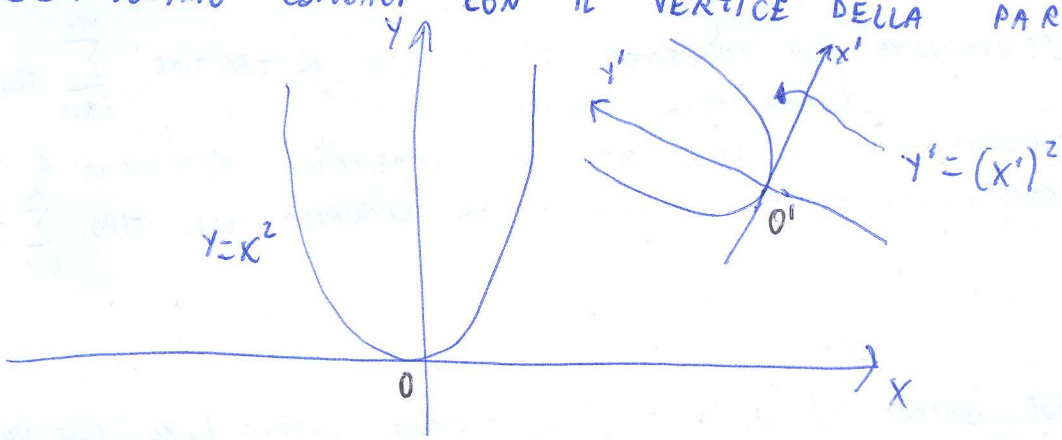
OVVERO ABBIAMO SUPPOSTO CHE SIA UNA PARABOLA

$y=x^2$ PARABOLA PASSANTE PER ORIGINE



SE É VERAMENTE UNA PARABOLA, RIDUCENDO TALE EQUAZIONE DOVREMMO RITROVARE LA FORMA CANONICA DI UNA PARABOLA.

PER FAR CIÒ LASCIAMO LA PRESUNTA PARABOLA FERMA, SPOSTIAMO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO FACENDO IN MODO CHE L'ORIGINE DI QUEST'ULTIMO COMBACI CON IL VERTICE DELLA PARABOLA



SE È DAVVERO UNA PARABOLA

TALE SPOSTAMENTO È DATO DALLA COMPOSIZIONE DI ROTAZIONI, SIMMETRIE E TRASLAZIONI, IN GENERALE.

QUADRICHE IN $\mathbb{R}^n$: LUOGHI GEOMETRICI DEFINITI DA UNA EQUAZIONE DI GRADO 2 IN n VARIABILI.

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{nn}x_n^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n + c = 0$$

OVVERO: $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{k=1}^{n} b_kx_k + c = 0$

OMOGENIZZIAMO L'EQUAZIONE DATA AGGIUNGENDO UNA VARIABILE x_0:

PERCIÒ AVREMO $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{k=1}^{n} b_{k0}x_kx_0 + cx_0^2 = 0$

CONSIDERO LA MATRICE ASSOCIATA ALLA FORMA QUADRATICA IN $n+1$ VARIABILI COSÌ OTTENUTA:

$$A' = \begin{pmatrix} c & \frac{b_{10}}{2} & \frac{b_{20}}{2} & \frac{b_{30}}{2} & \dots & \frac{b_{n0}}{2} \\ \frac{b_{10}}{2} & a_{11} & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{13}}{2} & \dots & \frac{a_{1n}}{2} \\ \frac{b_{20}}{2} & \frac{a_{12}}{2} & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \frac{b_{n0}}{2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{a_{nn}}{2} \end{pmatrix}$$

SE
- $|A'| = 0 \Rightarrow$ LA QUADRICA È DEGENERE.
- $|A'| \neq 0 \Rightarrow$ È NON DEGENERE.

RITORNIAMO ALL'EQUAZIONE NON OMOGENEA E CONSIDERO IL TERMINE $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$

MEDIANTE LA (USANDO METODO AUTOVALORI) DIAGONALIZZAZIONE DELLA MATRICE SIMMETRICA ASSOCIATA A TALE FORMA QUADRATICA, OTTENIVAMO UNA SUA FORMA CANONICA DEL TIPO $\sum_{l=1}^{n} \lambda_l x_l^2$

SE $\lambda_k \neq 0$ CIOÈ COMPARE $x_k^2 \Rightarrow$ "ELIMINO" IL TERMINE LINEARE b_kx_k CON UNA TRASLAZIONE, CIOÈ CAMBIANDO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO PONENDO $z_k = x_k + \frac{b_k}{2\lambda_k}$

SE SCOMPAIONO TUTTI I TERMINI LINEARI $\Rightarrow$ LA MIA QUADRICA Q È UNA QUADRICA A CENTRO (CIOÈ CON UN PUNTO DI SIMMETRIA)

ESEMPIO: $\boxed{x^2 - 4xy - 2y^2} - 3x - 3y + 5 = 0$

OMOGENEA

$$x^2 - 4xy - 2y^2 - 3xx_0 - 3yx_0 + 5x_0^2 = 0$$

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A'| \neq 0$$

NON DEGENERE

PRENDO LA PARTE QUADRATICA DELLA NON OMOGENEA.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

NELLE NUOVE VARIABILI X_1, X_2 SI HA

$$\boxed{2X_1^2 - 3X_2^2}$$

CERCO LA NUOVA $\overbrace{\text{BASE}}^{\text{ORTONORMALE}}$ CHE SARÀ $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \right\}$ (USANDO AUTOVALORI TROVO AUTOVETTORI E LI NORMALIZZO)

$\Rightarrow$ LE NUOVE COORDINATE IN FUNZIONE DELLE VECCHIE SARANNO

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}} X_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} X_2 \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}} X_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} X_2 \end{cases}$$

SOSTITUENDO LE VARIABILI OTTENGO LA NUOVA EQUAZIONE NELLE VARIABILI X_1, X_2

$$\boxed{2\sqrt{5}X_1^2 - 3\sqrt{5}X_2^2 - 9X_2 + 3X_1 + 5\sqrt{5} = 0}$$

TORNIAMO AL CASO GENERALE:

SIA A LA MATRICE ASSOCIATA ALLA PARTE QUADRATICA DELL'EQUAZIONE GENERICA DATA PRECEDENTEMENTE

SE $Rg\, A = \underset{\text{RANGO MASSIMO}}{n} \Rightarrow Q$ È DETTA NON SINGOLARE

CONTINUIAMO LA RICERCA DELLA FORMA CANONICA DELL'EQUAZIONE DELLA CURVA DELL'ESEMPIO: LA NOSTRA CONICA È NON SINGOLARE!

RIDUCIAMO AI QUADRATI LA NOSTRA EQUAZIONE (METODO DI RIDUZIONE AI QUADRATI)

$$2\sqrt{5}X_1^2 + 3X_1 - 3\sqrt{5}X_2^2 - 9X_2 + 5\sqrt{5} = 0$$

$$2\sqrt{5}\left(X_1^2 + \frac{3}{2\sqrt{5}}X_1\right) \qquad -3\sqrt{5}\left(X_2^2 + \frac{9}{3\sqrt{5}}X_2\right)$$

$$2\sqrt{5}\left[\left(X_1 + \frac{3}{4\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{9}{80}\right] \qquad -3\sqrt{5}\left[\left(X_2 + \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{9}{20}\right]$$

CAMBIO LE VARIABILI $\begin{cases} Y_1 = X_1 + \frac{3}{4\sqrt{5}} \\ Y_2 = X_2 + \frac{3}{2\sqrt{5}} \end{cases}$ QUESTA È LA TRASLAZIONE

NUOVA EQ: $2\sqrt{5}\left(Y_1^2 - \frac{9}{80}\right) - 3\sqrt{5}\left(Y_2^2 - \frac{9}{20}\right) = 0$

$$2\sqrt{5}Y_1^2 - \frac{9}{8\sqrt{5}} - 3\sqrt{5}Y_2^2 + \frac{27}{4\sqrt{5}} + 5\sqrt{5} = 0$$

$$-2\sqrt{5}Y_1^2 + 3\sqrt{5}Y_2^2 = \frac{245}{8\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{-Y_1^2}{\frac{245}{8\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}} + \frac{Y_2^2}{\frac{245}{8\sqrt{5}}\,\frac{1}{2\sqrt{5}}} = 1$$

$$\boxed{\frac{-Y_1^2}{\left(\frac{7}{4}\right)^2} + \frac{Y_2^2}{\left(\frac{7}{2\sqrt{6}}\right)^2} = 1} \rightarrow \text{IPERBOLE } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

QUESTO POICHÉ SEGNATURA ERA $(1,1)$; SE FOSSE STATA $(2,0)$ AVREMMO AVUTO UN ELLISSE.

TORNIAMO AL CASO GENERALE, CON $\text{rg}\,A = n \Rightarrow$ DETTO C IL TERMINE NOTO NELL'EQUAZIONE RIDOTTA IN FORMA CANONICA, POSTO AL II MEMBRO, SE $C \neq 0$ ⇒ PONIAMO $C > 0 \Rightarrow$ DIVIDIAMO PER C E OTTENIAMO:

$$\frac{X_1^2}{a_1^2} + \frac{X_2^2}{a_2^2} + \dots + \frac{X_k^2}{a_k^2} - \frac{X_{k+1}^2}{a_{k+1}^2} - \dots - \frac{X_n^2}{a_n^2} = 1$$

ABBIAMO, QUINDI IN GENEREALE, TANTI TIPI DI QUADRICHE NON SINGOLARI, NON DEGENERI, QUANTE LE POSSIBILITÀ PER GLI INDICI DI INERZIA, A PARTE IL CASO $(0, n)$. QUINDI AVREMO $(n,0), (n-1,1), \dots, (1, n-1)$

OVVERO SONO <u>n TIPI DIVERSI IN $\mathbb{R}^n$</u> <u>DI QUADRICHE A CENTRO NON SINGOLARI.</u>

IN $\mathbb{R}^3$: $(3,0), (2,1), (1,2)$

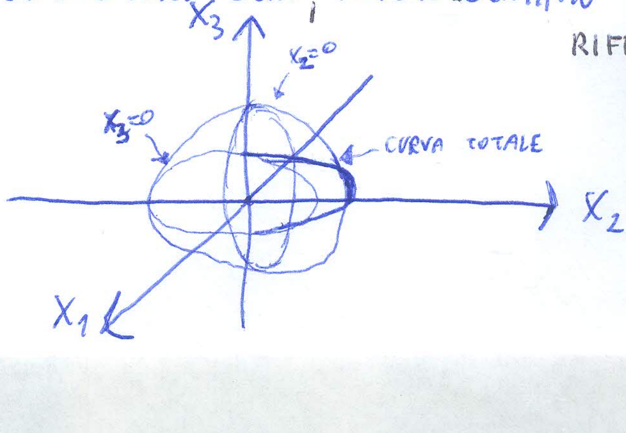
$(3,0) \rightarrow \frac{X_1^2}{a_1^2} + \frac{X_2^2}{a_2^2} + \frac{X_3^2}{a_3^2} = 1$

$(2,1) \rightarrow \frac{X_1^2}{a_1^2} + \frac{X_2^2}{a_2^2} - \frac{X_3^2}{a_3^2} = 1$

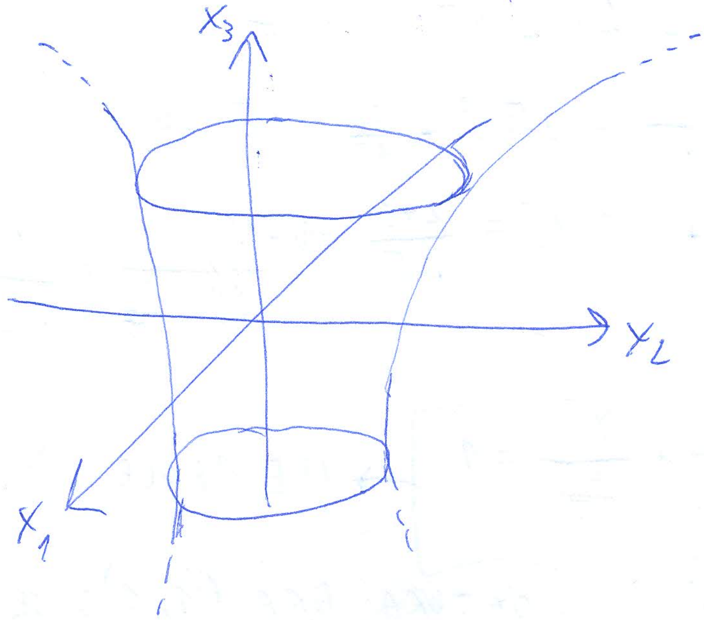
$(1,2) \rightarrow \frac{X_1^2}{a_1^2} - \frac{X_2^2}{a_2^2} - \frac{X_3^2}{a_3^2} = 1$

PER CAPIRE CHE OGGETTI GEOMETRICI SONO, INTERSECHIAMO CON I PIANI DEL RIFERIMENTO E PIANI AD ESSI PARALLELI

$$\begin{cases} \frac{X_1^2}{a_1^2} + \frac{X_2^2}{a_2^2} + \frac{X_3^2}{a_3^2} = 1 \\ X_1 = 0 \end{cases}$$



(2,1) IPERBOLOIDE AD UNA FALDA



(-1,2) IPERBOLOIDE A DUE FALDE