29-03-2017

Proposizione: Sia $F: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bilineare simmetrica $\Rightarrow \exists$ una base B di V, F-ortogonale ($\dim V = n$)
↓
vettori F-coniugati

Dimostrazione: per induzione sulla dimensione n di V

1) per $n = 1$ la verifica è ovvia, poiché esisterà una base di V composta da un solo vettore, quindi sarà F-ortogonale.

2) Supponiamo la prop. vera fino a $n = k$ e dimostriamolo per $n = k+1$.
Supposto $F \neq 0$. $\exists$ sempre un vettore v non isotropo $\Rightarrow$ considero
$v^{\perp} = \langle\langle v \rangle\rangle^{\perp} = \{ w \in V \mid F((v, w)) = 0 \}$
$\Downarrow$
$v^{\perp}$ è un iperpiano di V, uno spazio di dimensione k: per ipotesi induttiva se considero $F\big|_{v^{\perp} \times v^{\perp}} : v^{\perp} \times v^{\perp} \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \exists$ una base $B_{\perp}$ di $v^{\perp}$ formata da vettori F-coniugati: $B_{\perp} = \{ v_1, \dots, v_k \} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sapendo che $V = \langle\langle v \rangle\rangle \oplus v^{\perp}$, posso prendere come base di V
$B_V = \{ v, v_1, \dots, v_k \}$ è una base di V F-coniugata.
↓
è nel complemento ortogonale dello spazio
↓
aggiungendolo ho vettori tutti linearmente indipendenti che formano una base di V e sono F-coniugati

Conseguenza: Considero una base B in V e sia $A = [F]_B \Rightarrow A$ è simmetrica.
(vado a considerare la matrice associata)
Si può determinare una base $B_{\perp}$ (come dimostrato sopra) di V, formata da vettori F-coniugati $\Rightarrow [F]_{B_{\perp}}$ è una matrice diagonale

Riusciamo sempre ad associare ad una forma bilineare una matrice simmetrica, la caratteristica p deve essere diversa da 2.

In altre parole ogni matrice simmetrica reale è sempre congruente ad una matrice diagonale, cioè $\exists S \mid [F]_{B_{\perp}} = S^T \cdot A \cdot S$
↓
Questo non vuol dire che sia diagonalizzabile! poiché

P. 2

stiamo lavorando non con applicazioni lineari, ma con forme bilineari!

Proposizione.

Una matrice simmetrica reale ha solo radici caratteristiche reali.

Dimostrazione.

Sia $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica reale e sia λ_0 una radice caratteristica

cioè $|A-\lambda_0 I|=0 \Rightarrow$ il sistema $(A-\lambda_0 I)X=0$ ha soluzioni non nulle

lineare omogeneo

sia C una (TALE) soluzione che può essere complessa, cioè $C=(c_1,\dots,c_n)$ con

$c_j \in \mathbb{C}\ \forall j \Rightarrow (A-\lambda_0 I)C=0 \Rightarrow AC=\lambda_0 C \Rightarrow$ posto $\bar{C}^T=(\bar{c}_1,\bar{c}_2,\dots,\bar{c}_n) \Rightarrow$

moltiplico per $\bar{C}^T$ a sinistra $\Rightarrow \underset{1\times n}{\bar{C}^T}\underset{n\times n}{A}\underset{n\times 1}{C}=\bar{C}^T\lambda_0 C \Rightarrow \bar{C}^T A C=\lambda_0 \bar{C}^T C \Rightarrow$

$(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|x+iy|^2$

$\Rightarrow \bar{C}^T C=(\bar{c}_1,\bar{c}_2,\dots,\bar{c}_n)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=\underbrace{\bar{c}_1c_1}_{\mathbb{R}}+\underbrace{\bar{c}_2c_2}_{\mathbb{R}}+\dots+\bar{c}_nc_n \in \mathbb{R} \Rightarrow$ DIVIDO PER

$\bar{C}^T C \Rightarrow \lambda_0=\dfrac{\bar{C}^T\cdot A\cdot C}{\bar{C}^T C}$ posso dividerlo per $\bar{C}^T C$ perché ho dimostrato che $\bar{C}^T C$ è un numero reale $\in \mathbb{R}$.

Ora voglio dimostrare che $\bar{C}^T\cdot A\cdot C \in \mathbb{R}$.

es: $x+iy\in\mathbb{R} \Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow x+iy=x-iy \Leftrightarrow \begin{cases}x=x\\ y=-y\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{y=0} \Rightarrow$

un numero è reale quando coincide con il suo coniugato

$\Rightarrow$ CERCO $\overline{\bar{C}^T\cdot A\cdot C}=C^T\cdot\bar{A}\cdot\bar{C}=C^T\cdot A\cdot\bar{C}$ inoltre $(\bar{C}^T\cdot A\cdot C)^T=C^T\cdot A^T\cdot\bar{C}=$ ma questa è simmetrica

quindi $=\boxed{C^T\cdot A\cdot \bar{C}}$

in realtà è uno scalare, ma la trasposta di uno scalare è lo scalare stesso, quindi avrò sempre $\bar{C}^T\cdot A\cdot C$

$\Rightarrow C^T\cdot A\cdot\bar{C}=\overline{C^T\cdot A\cdot\bar{C}} \Rightarrow C^T\cdot A\cdot\bar{C}\in\mathbb{R} \Rightarrow \lambda_0\in\mathbb{R}$

Definizioni.

Sia $F: V\times V \to \mathbb{R}$ forma bilineare simmetrica $\Rightarrow$ F è detta

1) DEFINITA POSITIVA se $F((v,v))>0\ \forall v\in V,\ v\neq 0$ → poiché avrò una matrice diagonale con rg max poiché ho tutti elementi non nulli sulla diagonale principale.

2) POSITIVA (o semidefinita positiva) se $F((v,v))\geq 0\ \forall v\in V$

3) DEFINITA NEGATIVA se $F((v,v)) < 0 \ \forall v \in V,\ v \neq 0$

4) NEGATIVA (semidefinita negativa) se $F((v,v)) \leq 0 \ \forall v \in V$

5) INDEFINITA altrimenti.

Definizione

Una forma quadratica su uno spazio vettoriale V reale e' una forma $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ | soddisfa due proprieta':

1) $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v) \ \forall v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

2) La forma $F : V \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita $F((v,w)) = \underbrace{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}$ e' bilineare simmetrica.

sono scalari quindi vado a finire in $\mathbb{R}$

Esempio:

$Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto x_1^2 + 2x_1x_2$

Q e' forma quadratica?

1) $Q(\lambda \cdot V) = Q\left(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = Q\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} =$

CERCO L'IMMAGINE

$= (\lambda x_1)^2 + (2\lambda x_1)(\lambda x_2) =$

$= \lambda^2 x_1^2 + 2\lambda^2 x_1 x_2 =$

$= \lambda^2 (x_1^2 + 2x_1x_2) \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

2) $F((v,w)) = F\left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)\right) =$

$= Q\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} - Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$

$= (x_1 + y_1)^2 + 2(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) - x_1^2 - 2x_1x_2 - y_1^2 - 2y_1y_2 =$

$= \cancel{x_1^2} + \cancel{y_1^2} + 2x_1y_1 + 2x_1y_1 + 2\cancel{x_1x_2} + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + 2\cancel{y_1y_2} +$
$- \cancel{x_1^2} - 2\cancel{x_1x_2} - \cancel{y_1^2} - 2\cancel{y_1y_2}$

quindi rimane: $\longrightarrow 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2$

polinomio di SECONDO grado, con elementi misti in cui compare sia le x che le y. OMOGENEO: è UNA forma bilineare!

ORA VEDIAMO SE F È SIMMETRICA:

qui sostituisco i vettori della base C

$F\left(\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)\right)$

e risolvo con: $2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2$, ciò che ottengo lo inserisco nella matrice $[F]_C$

Possiamo trovare la matrice associata alla forma bilineare:

CERCO $[F]_C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ questa e' una matrice simmetrica!

Dimostrati i punti 1 e 2 allora posso dire che Q è una forma quadratica

A partire da $Q : V \to \mathbb{R}$, forma quadratica, voglio determinare una forma bilineare simmetrica $F_Q : V \times V \to \mathbb{R} \mid F_Q((v,v)) = Q(v)$

Ho già determinato $F((v,w)) = Q(v+w) - Q(v) - Q(w)$ forma bilineare simm. $\Rightarrow$

$F((v,v)) = Q(2v) - Q(v) - Q(v) = 4Q(v) - 2Q(v) = 2Q(v)$

$\Rightarrow$ se prendo $F_Q = \frac{F}{2}$ cioè $F_Q((v,w)) = \frac{Q(v+w) - Q(v) - Q(w)}{2}$, F_Q è forma bilineare simmetrica $\mid F_Q((v,v)) = Q(v)$

F_Q è detta forma POLARE di Q.

Viceversa se ho una forma bilineare simmetrica $F : V \times V \to \mathbb{R} \Rightarrow$ posso costruire una forma quadratica $Q : V \to \mathbb{R}$, $v \mapsto F((v,v))$ ponendo $Q(v) = F((v,v))$ $\forall v \in V$

Verificare che Q così ottenuta è una forma quadratica di cui F è la polare. (x CASA)

Domanda:

- Possiamo associare una matrice ad una forma quadratica?
- Se sì come?