① 28/09/16

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ \quad\quad x_2 + x_3 = 2 \\ \quad\quad\quad\quad 4x_3 = 3 \end{cases}$$

Abbiamo finito la parte "in discesa" del metodo di riduzione di Gauss. Il sistema ottenuto è equivalente a quello di partenza.

↳ Abbiamo 3 coefficienti non nulli delle prime variabili di ogni equazione.

DEFINIZIONE

PIVOT = coefficienti non nulli delle prime variabili di ogni equazioni nel sistema "a gradini"

RANGO DEL SISTEMA = numero dei pivot presenti nel sist. a gradini

Il sistema sopra ha rango 3, i pivot sono 1, 1 e 4.
Ora continuiamo nel metodo con la "parte ascendente": eliminiamo volta per volta tutte le variabili, partendo dall'ultima equazione →

→ ELIMINIAMO x_3 (variabile del pivot nella III equaz.) nella I e II equazione.

Sostituisco nella II la seguente combinazione = 4 · II eq. − III eq.

$$4(x_2 + x_3 - 2) - (4x_3 - 3) = 0$$

$$4x_2 + \cancel{4x_3} - 8 - \cancel{4x_3} + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x_2 = 5$$

→ DA VERIFICARE

Questo è il nuovo sistema (equivalente a quello precedente)
↓
quindi anche a quello di partenza (PRINCIPIO DI TRANSITIVITÀ DELLA RELAZIONE DI EQUIVALENZA TRA SISTEMI)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ \quad 4x_2 \quad\quad = 5 \\ \quad\quad\quad 4x_3 = 3 \end{cases}$$

RELAZIONI DI EQUIVALENZA
- RIFLESSIVITÀ
- simmetria
- transitività

Ora sostituiamo alla I eq. la seguente combinazione: 4 · I eq. + 3 III eq.

$$4(x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 1) + 3(4x_3 - 3) = 0$$

$$4x_1 + 8x_2 - \cancel{12x_3} - 4 + \cancel{12x_3} - 9 = 0$$

$$4x_1 + 8x_2 = 13$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 = 13 \\ 4x_2 = 5 \\ \boxed{4x_3} = 3 \end{cases}$$

Questo è ancora un sistema equivalente a quello di partenza.

↳ sopra il pivot di x_3 i coefficienti sono tutti nulli:

→ voglio che sia così anche per x_2.

Sostituisco a I la combinazione I eq. $- 2 \cdot$ II eq.

$$(4x_1 + 8x_2 - 13) - 2(4x_2 - 5) = 0$$

$$4x_1 + \cancel{8x_2} - 13 - \cancel{8x_2} + 10 = 0 \rightarrow 4x_1 = 3$$

$$\begin{cases} 4x_1 = 3 \\ 4x_2 = 5 \\ 4x_3 = 3 \end{cases}$$

Ora sostituiamo alle equazioni le equazioni stesse divise ("moltiplicate" è meglio) PER IL RECIPROCO per il rispettivo pivot.

QUESTA È LA FORMA A GRADINI CANONICA DEL SISTEMA

$$\begin{cases} x_1 = 3/4 \\ x_2 = 5/4 \\ x_3 = 3/4 \end{cases}$$

Dobbiamo verificare se il sistema ottenuto è equivalente a quello di partenza, cioè che l'operazione di sostituzione di un'equazione con un suo multiplo rende ancora il sistema equivalente a quello di partenza.

DIMOSTRAZIONE

Se ho $\alpha \cdot P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e trovo $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, \alpha \cdot P(\beta_1, \dots, \beta_n) = 0$

$\Rightarrow P(\beta_1, \dots, \beta_n) = 0$ in quanto si suppone $\alpha \neq 0$ e dividiamo per α.

APRIAMO UNA PARENTESI:

$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$ → il prodotto cartesiano è ordinato, mi dice ogni elemento della ennupla a quale insieme DEL PRODOTTO CARTESIANO appartiene (in questo caso $\mathbb{R}$ per tutti)

↓

$\times$ = "prodotto cartesiano", prodotto tra insiemi.

$\mathbb{N}$ = num. naturali
$\mathbb{Z}$ = num. interi
$\mathbb{Q}$ = num. razionali

Sono "visti" come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ (num. reali) ma in realtà sono dati in maniera autonoma (vedi i 5 Assiomi di Peano per $\mathbb{N}$).

5° assioma = permette dimostrazione per induzione (1) SI VERIFICA LA PROPRIETÀ PER IL NATURALE + PICCOLO POSSIBILE 2) se una proprietà vale fino a k e dimostro che vale anche per $k+1$ ⟹ vale per tutti)

3

28/09/16

5° Assioma di Peano: (2). Se $A \subseteq \mathbb{N}$ e se $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$ per un generico x, $\Rightarrow A = \mathbb{N}$

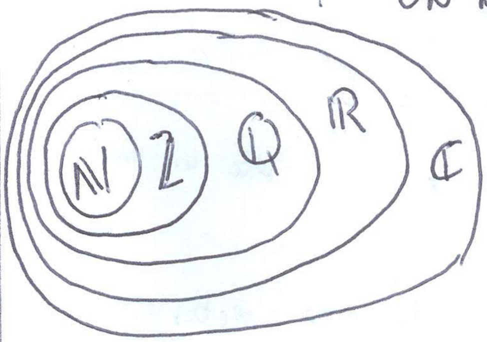
(1). Se $0 \in A$

$\mathbb{Q}$ invece è L'INSIEME DELLE CLASSI DI EQUIVALENZA DI COPPIE DI NUMERI INTERI. SECONDO LA RELAZIONE $\mathcal{R}$ SEGUENTE:

Infatti: $\frac{-2}{3} = \frac{-4}{6} = \frac{8}{-12} \dots$ $\quad (p_1, q_1)\mathcal{R}(p_2, q_2) \Leftrightarrow p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1$

Io posso raggruppare tutte le COPPIE equivalenti in CLASSI DI EQUIVALENZA

L'insieme delle CLASSI è $\mathbb{Q}$: OGNI CLASSE DI EQUIVALENZA È UN NUMERO RAZIONALE, RAPPRESENTATO DA UNA FRAZIONE



(METTENDO DELLE OPERAZIONI) Nei sottoinsiemi ho delle strutture algebriche che posso collegare con delle APPLICAZIONI o MORFISMI

Ad es. $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $\quad n \longrightarrow \frac{n}{1}$ $\quad$ Questa legge è biettiva per un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ $\rightarrow$

INOLTRE $f(n+m) = f(n) + f(m) \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow f$ è detto MORFISMO

$$\frac{n+m}{1} = \frac{n}{1} + \frac{m}{1}$$

MORFISMO: $f: (A, *) \longrightarrow (B, \square)$

$$f(a_1 * a_2) = f(a_1) \square f(a_2)$$

$*$ e $\square$ sono le operazioni delle strutture algebriche.

Se il morfismo $f: (A, *) \rightarrow (B, \square)$ è biettivo è detto ISOMORFISMO

Nel caso esaminato abbiamo preso l'addizione in $\mathbb{N}$ e l'addizione in $\mathbb{Q}$, (che è diversa: ci vuole denominatore comune, etc...)

Poiché abbiamo detto che f è biettiva su un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ abbiamo un isomorfismo, quindi possiamo operare in $\mathbb{N}$ come se fossimo contemporaneamente in $\mathbb{Q}$ (CIOÈ), come se fossimo in un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{N}$ però non è un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$: $\exists$ UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{Q}$ ISOMORFO AD $\mathbb{N}$, CHE POSSIAMO "SOSTITUIRE" AD $\mathbb{N}$

TORNIAMO AL SISTEMA: (4) 28/09/16

> Se Σ ha soluzione $\Rightarrow \exists\ \infty^{n-r}$ soluzioni, dove
>
> n = numero di variabili
>
> r = rango del sistema
>
> TEOREMA DI ROUCHE'-CAPELLI

Nel nostro caso abbiamo

3 variabili (x_1, x_2, x_3)

Rango 3

$\rightarrow \infty^{3-3} = \infty^0 = 1$ soluzione

Facciamo ~~un altro~~ un altro esempio

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases}$$

n° variabili = 2

Rango = 1 (c'è solo un pivot)

abbiamo $\infty^{2-1} = \infty^1$ soluzioni $\rightarrow$ tutti i punti di una retta,

DI EQUAZIONE: $x_1 + x_2 = 1$