21/02/2017

CORREZIONE PROVA PARZIALE DI GEOMETRIA [21/02/2017]

Esercizio 3

i) $W = \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$ eq. lineari omogenee! DEFINISCONO UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE

• Base? $\begin{cases} x_3 = -2x_1 + x_2 \\ x_4 = x_1 + x_2 \end{cases}$ $\dim W = 2$ W è un piano in $\mathbb{R}^4$

Cerco una B_W

x_3	x_4	x_1	x_2
-2	1	1	0
1	1	0	1

$\Rightarrow B_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

~~Base~~ EQ. PARAMETRICA

Pongo: $s, t \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = t \\ x_3 = -2s + t \\ x_4 = s + t \end{cases}$ Passo alla VETTORIALE $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

L'insieme dei vett. è combinazione lineare dei due vett. di base.

ii) $V = \left\langle\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle\right\rangle$ sottospazio di $\mathbb{R}^4$

Passo alla matrice: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calcolo il determinante sui minori di ordine 3.

$\dim V = 3 \Rightarrow$ i tre vett. sono lin. indipendenti. Spazio 3-dimensionale in $\mathbb{R}^4$

$B_V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con $s, t, r \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_1 = t + r \\ x_2 = t \\ x_3 = s + r \\ x_4 = s \end{cases}$

Il sistema di V, SOTTOSPAZIO di dimensione 3 in $\mathbb{R}^4$, è dato da un'unica equazione.

$\begin{cases} x_1 = x_2 + r \\ x_2 = t \\ x_3 = x_4 + r \\ x_4 = s \end{cases}$ Ricavo: $r = x_1 - x_2$ $\Rightarrow x_3 = x_4 + x_1 - x_2$

L'eq. del sottospazio V in $\mathbb{R}^4$ è $\boxed{x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0}$

iii) $(1,2,3,4)^T \in V$? $x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$

Sostituisco: $1 - 2 - 3 + 4 = 0$

Il vett. appartiene a V

iv) Unisco B_W e B_V ottengo $\underbrace{\quad}_{\text{GENERATORI DI}}$ $W+V$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Si estrae una base con il criterio dei minori per ordine 4. Ottengo una possibile base di $W+V$:

Per esempio: B_{W+V} $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\dim(W+V) = 4$

iii) ~~[illegible]~~ $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Si dimostra che:

$Ker(T-\lambda Id) = E_\lambda$:

Cerco autovalori:

$$\left| [T]^B_B - \lambda_0 I \right| = 0$$

$$E_{\lambda_0} : \left([T]^B_B - \lambda_0 I \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{0}_V \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\lambda_0} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (T - \lambda_0 Id) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\} \Rightarrow E_{\lambda_0} = Ker(T - \lambda_0 id)$$ c.v.d

SE 0 è autovalore $\Rightarrow$ il suo autospazio è il nucleo di T; TALE NUCLEO È diverso da $\underline{0}_V$ E QUINDI PUÒ ESSERE AUTOSPAZIO

iv) B di $\mathbb{R}^3$ t.c. $[T]_B = D$: tra le matrici simili a $[T]_e$ ne esiste una diagonalizzabile?

Quindi, $[T]_e$ è diagonalizzabile?

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ 3 & 3-\lambda & -3 \\ 6 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\left[(3-\lambda)(-1-\lambda)+6\right] + 3 + 3\lambda =$$

$$= -(1+\lambda)\left[(3-\lambda)(-1-\lambda)+6\right] + 3(1+\lambda) =$$

$$= (1+\lambda)(\cancel{-3} + 2\lambda - \lambda^2 \cancel{+3}) = \lambda(1+\lambda)(2-\lambda) = 0$$

Trovo tre radici: $\lambda_0 = -1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$

Molteplicità algebrica di ogni autovalore è ~~[illegible]~~ 1. Coincide con la rispettiva molteplicità geometrica che È SEMPRE COMPRESA TRA 1 E LA MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cerco vett. di base relativi a ciascun autovalore; LA LORO UNIONE DÀ LA BASE DELLO SPAZIO RICHIESTA.

$$B = \left\{ \underset{E_{-1}}{\begin{pmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}}, \underset{E_0}{\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}}, \underset{E_2}{\begin{pmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}} \right\}$$

E_0 ricavo da nucleo.

E_{-1} ricavo da da $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underline{0}_V = Ker(T+1Id)$

E_2 ricavo da $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

TROVO UNA BASE PER OGNI AUTOSPAZIO, LE UNISCO E DETERMINO LA BASE DELLO SPAZIO