26/04/2017

Definizione: Si dice PRODOTTO SCALARE una forma bilineare simmetrica, definita positiva, reale.

es. In $\mathbb{R}^4$ mettiamo la seguente forma ~~bilineare~~ quadratica: $x_1^2+x_2^2+x_3^2-cx_4^2$ con c costante positiva $\neq 0$. $\Rightarrow$ La forma bilineare associata alla forma quadratica data é definita reale ma non positiva $\Rightarrow$ non é un prodotto scalare. Tale forma quadratica (con c=velocità della luce) é detta forma quadratica di Minkowski (non é definita positiva)

$\Rightarrow \exists$ vettori $\neq 0$ di $\mathbb{R}^4$ t.c. $Q(v)>0$, $\exists$ vettori $v\in\mathbb{R}^4 \mid Q(v)<0$ e vettori $\mid Q(v)=0$. (VETTORI LUCE) (DETTI VETTORI SPAZIO) (DETTI VETTORI TEMPO)

$\mathbb{R}^4$ DOTATO DELLA FORMA DI MINKOWSKI É LO SPAZIO DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA

In $\mathbb{R}^n$, euclideo, studiamo la "geometria" indotta dal prodotto scalare.

Definiamo la LUNGHEZZA di un vettore di $\mathbb{R}^n$ euclideo:

se F é il prodotto scalare $\Rightarrow$ la lunghezza di v, cioé la sua norma

$$\|v\|=\sqrt{F((v,v))}=\sqrt{Q_F(v)}$$

si può fare perché la forma bilineare é definita positiva

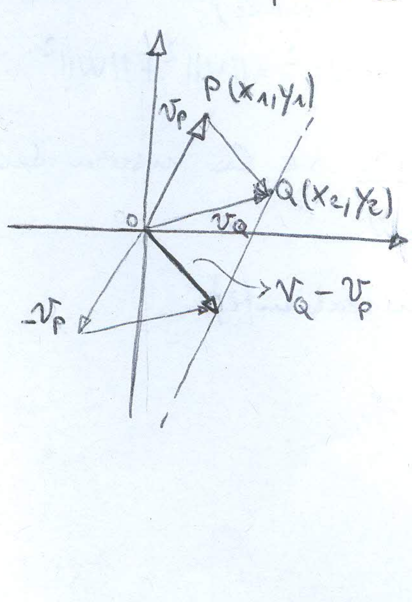
es. In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard:

$F((v,w))=v\cdot w=\langle v,w\rangle$; posto $v=(x_1,x_2,x_3)$; $w=(y_1,y_2,y_3)$

$\Rightarrow v\cdot w = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$

$$\Rightarrow \|v\|=\sqrt{v\cdot v}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \Rightarrow \boxed{\text{se } v\in\mathbb{R}^n \Rightarrow \|v\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_2^2}}$$

Distanza tra 2 punti di $\mathbb{R}^2$:



$$d(P,Q)=\|v_Q-v_P\|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

in $\mathbb{R}^n$ posto $P=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ e $Q=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow d(P,Q)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(y_j-x_j)^2}$$

Disuguaglianza di Schwarz

Dati $v, w \in \mathbb{R}^n$ euclideo $\Rightarrow |v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$

Dim.: 1° caso: v e w lin. dip. $\Rightarrow w = \alpha v \Rightarrow |v \cdot w| = |v \cdot (\alpha v)| = |\alpha (v \cdot v)| =$
$= |\alpha| \, |v \cdot v| = |\alpha| \, \|v\|^2$

2° caso: v e w lin. indip. $\Rightarrow$ possiamo considerare il sottospazio generato da v e w: $U = \langle\langle v, w \rangle\rangle$

$\Rightarrow$ considero il prodotto scalare su U

$\Rightarrow$ la matrice ad esso associata è

$$\begin{pmatrix} v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot v & w \cdot w \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} v \cdot v & v \cdot w \\ w \cdot v & w \cdot w \end{vmatrix} > 0$$ (per JACOBI, essendo il prodotto scalare definito positivo)

$\Rightarrow (v \cdot v)(w \cdot w) - (v \cdot w)^2 > 0 \Rightarrow (v \cdot w)^2 < (v \cdot v)(w \cdot w)$

$\Rightarrow (v \cdot w)^2 < (\|v\| \|w\|)^2 \Rightarrow |v \cdot w| < \|v\| \|w\|$.

c.v.d.

Disuguaglianza triangolare

$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

$(\|v+w\|)^2 = (v+w) \cdot (v+w) = v \cdot v + \underbrace{v \cdot w + w \cdot v} + w \cdot w = \|v\|^2 + 2 \, v \cdot w + \|w\|^2$

(adopero la disuguaglianza di Schwarz)

$\|v\|^2 + 2 \, v \cdot w + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$

$\Rightarrow \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

c.v.d.

Th. di Pitagora

In questo caso considero $v \cdot w = 0$ ($\Rightarrow$ vettori ortogonali)

$\Rightarrow$ la disuguaglianza triangolare diventa: $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$

Definizione: Definiamo 2 vettori PERPENDICOLARI se la misura dell'angolo da essi formato è 90°: $v \perp w$

(Gli angoli si misurano in gradi, gli archi in radianti).

Abbiamo dimostrato che dati 2 vettori $v, w \in \mathbb{R}^n$ euclideo: $|v \cdot w| \leq \|v\| \|w\|$

Se $v \neq 0$ e $w \neq 0 \Rightarrow \dfrac{|v \cdot w|}{\|v\| \|w\|} \leq 1$

$$\Rightarrow -1 \leq \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} \leq 1 \Rightarrow \text{pongo } \frac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} = \cos\alpha \quad \text{con } \alpha = \widehat{vw}, \text{ con } 0 \leq \alpha \leq \pi$$

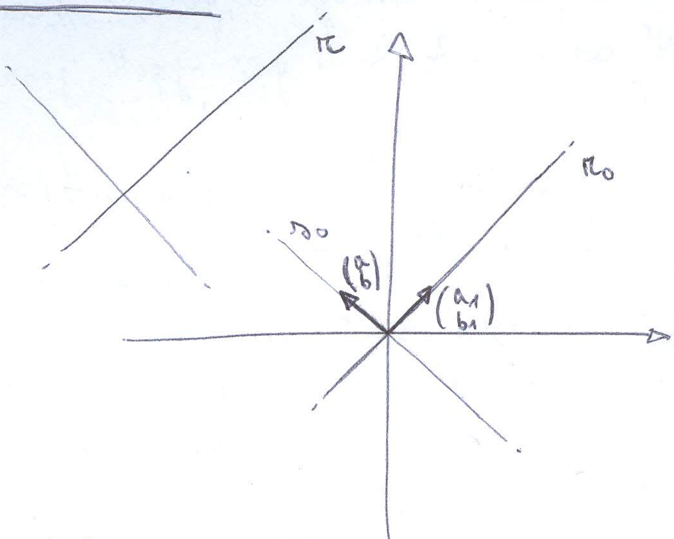
1) Così determiniamo la misura dell'angolo

2) Così ritroviamo $v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos\alpha$

3) v e w sono ortogonali $\Leftrightarrow v \cdot w = 0 \Leftrightarrow \dfrac{v \cdot w}{\|v\| \|w\|} = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 90°$
$\Leftrightarrow v \perp w$

Perpendicolarità tra rette in $\mathbb{R}^2$ euclideo

1) Due rette in $\mathbb{R}^n$ sono perpendicolari $\Leftrightarrow$ lo sono le loro direzioni.



2) Consideriamo in $\mathbb{R}^2$: $r: ax + by + c = 0$
e $s: a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$\Rightarrow r_0: ax + by = 0$

$s_0: a_1x + b_1y = 0$

$r_0: (a, b) \cdot (x, y) = 0$

$\Rightarrow$ il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ è ortogonale a tutti i vettori di $r_0 \Rightarrow$ a r
e il vettore $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ è ortogonale a tutti i vettori di $s_0 \Rightarrow$ a s.

$$\Rightarrow r \perp s \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{a a_1 + b b_1 = 0.}$$

$r: ax + by + c = 0$ Se $b \neq 0 \Rightarrow$ divido per $b \Rightarrow \dfrac{a}{b}x + y + \dfrac{c}{b} = 0$

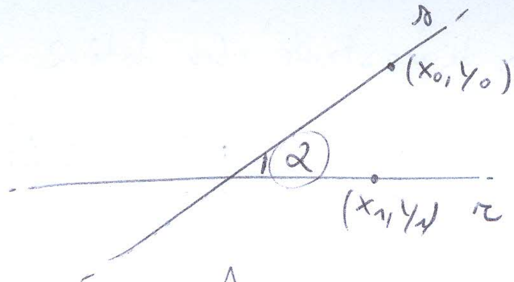
$\Rightarrow y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b} \Rightarrow y = mx + q$

$(-m)x + y + (-q) = 0 \Rightarrow$ il vettore $\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix}$ è $\perp$ a r_0.

Analogamente $\begin{pmatrix} -m_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è $\perp$ a s_0

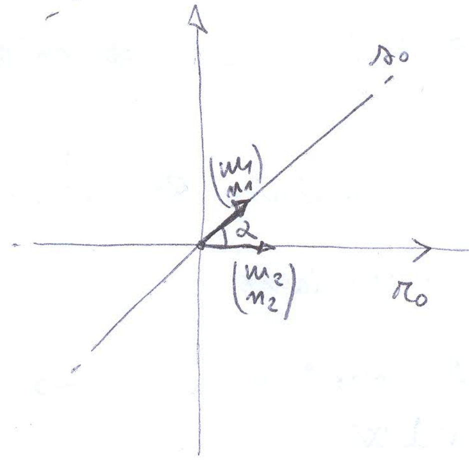
$$\Leftrightarrow r \perp s \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -m_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow m m_1 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{m_1 = -\frac{1}{m}}.$$

Angolo tra 2 rette r ed s.



$$s: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} \right\|}.$$

Perpendicolarità tra piani in $\mathbb{R}^3$ euclideo

→ procedimento analogo a quello precedente (rette in $\mathbb{R}^2$ euclideo)
(così come per tutti gli oggetti geometrici descritti da una equazione LINEARE in $\mathbb{R}^n$).

Due piani in $\mathbb{R}^n$ sono perpendicolari $\Leftrightarrow$ lo sono le loro direzioni

Considero in $\mathbb{R}^3$: $\pi_1: ax+by+cz+d=0$ e $\pi_2: a_1x+b_1y+c_1z+d=0$

$\pi_{1,0}: ax+by+cz=0$

$(a,b,c)\cdot(x,y,z)=0 \Rightarrow$ il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è ortogonale a tutti i vettori di $\pi_{1,0}$, quindi a π_1.

Analogamente $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ è ortogonale a π_2.

$\Rightarrow \pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow aa_1+bb_1+cc_1=0.$

Da fare: distanza tra 2 rette in $\mathbb{R}^2$
" tra 1 retta e 1 piano
" punto-retta in $\mathbb{R}^2$
" retta-retta in $\mathbb{R}^3$.