25/10/2016 - **GEOMETRIA**

Noto che $(AB)^T = B^T A^T$ ← ORDINE INVERSO

• PROPOSIZIONE $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}}$

→ DIMOSTRAZIONE:

Per la definizione di MATRICE INVERSA si ha:

$$(AB)(AB)^{-1} = I \rightarrow \underbrace{A \cdot B}_{\text{Devono essere invertibili}} \cdot (AB)^{-1} = I$$

→ MOLTIPLICO A SX per A^{-1}

$$\underbrace{(A^{-1} A)}_{\text{MATRICE } I} B (AB)^{-1} = A^{-1} \cdot \underbrace{I}_{\text{EL. NEUTRO}} \rightarrow \cancel{I} B (AB)^{-1} = A^{-1} \cdot \cancel{I}$$

→ MOLTIPLICO A SX per B^{-1}

$$\underbrace{(B^{-1} B)}_{I} (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \rightarrow \boxed{(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}} \quad \text{c.v.d}$$

ESERCIZIO

NOTE

$$A, B \in M_{n \times n} \rightarrow (A+B)^2 = (A+B)(A+B) \overset{?}{=}$$

$$= A^2 + 2AB + B^2$$

DIMOSTRARE!

IN UNO **SPAZIO VETTORIALE** V → dal punto di vista INSIEMISTICO CI SONO I SOTTOINSIEMI DI V → FRA GLI ELEMENTI DEI SOTTOINSIEMI CI SONO LE STESSE OPERAZIONI DATE IN V

↓

MA A VOLTE LE OPERAZIONI SONO CHIUSE → SE SÌ ←

<u>DEFINIZIONE</u>:

In uno spazio vettoriale V su un campo K, chiamo **SOTTOSPAZIO VETTORIALE** un sottoinsieme di V CHIUSO rispetto alle operazioni introdotte in V. → **CIOÈ**, detto W tale sottoinsieme

$$\forall w_1, w_2 \in W \quad w_1 + w_2 \in W$$

e

$$\forall \alpha \in K \quad \alpha w \in W \quad \forall w \in W$$

- **INOLTRE** il vettore nullo deve sempre appartenere a tale sottoinsieme

---

ESEMPIO: (in $\mathbb{R}$)

In $\mathbb{R}$, l'intervallo $\boxed{(-3;3)}$ è SOTTOSPAZIO VETTORIALE?

$\boxed{NO}$ → esempio $(-3) \cdot (3) = -9$ (non è compreso nell'intervallo)

- L'intervallo $\boxed{(0;+\infty)}$ $\boxed{NO}$
- L'intervallo $(-\infty;+\infty)$ → SÌ! è un SOTTOSPAZIO VETTORIALE

L'INSIEME COSTITUITO DAL SOLO $\{0\}$ → SÌ! $0+0=0$, $\alpha \cdot 0 = 0$

<u>**OSSERVAZIONE**</u>:

SEMPRE TROVIAMO TRA I SOTTOSPAZI VETTORIALI di V, V STESSO e $\{0\}$, che sono detti **SOTTOSPAZI BANALI**

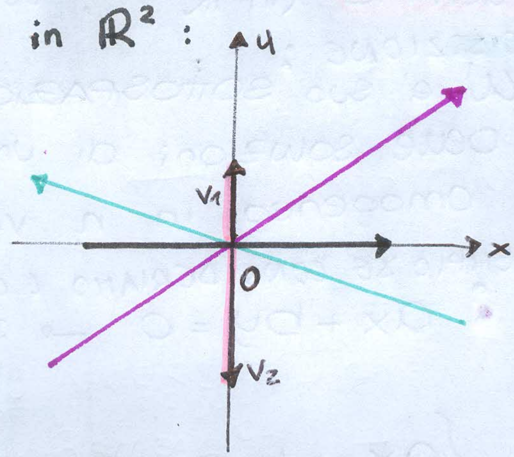
CI SONO $\boxed{\text{ALTRI SOTTOSPAZI}}$ DI $\mathbb{R}$? AD ESEMPIO:

$I = \{\text{IRRAZIONALI}\}$ → NO: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{N}$

→ GLI UNICI SOTTOSPAZI di $\mathbb{R}$ sono quelli <u>BANALI</u>

ESEMPIO: (In $\mathbb{R}^2$)

- CERCO I SOTTOSPAZI VETTORIALI in $\mathbb{R}^2$:



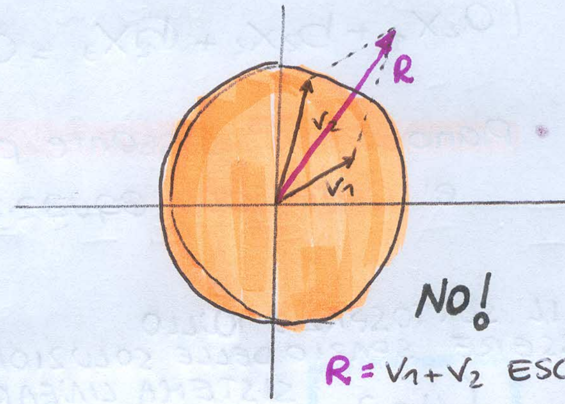
→ BANALI: $\mathbb{R}^2$, $\{0\}$

→ ALTRI • $\mathbb{R}$ QUALUNQUE RETTA PASSANTE in O e' SOTTOSPAZIO VETTORIALE

$\Downarrow$

IN CONCLUSIONE

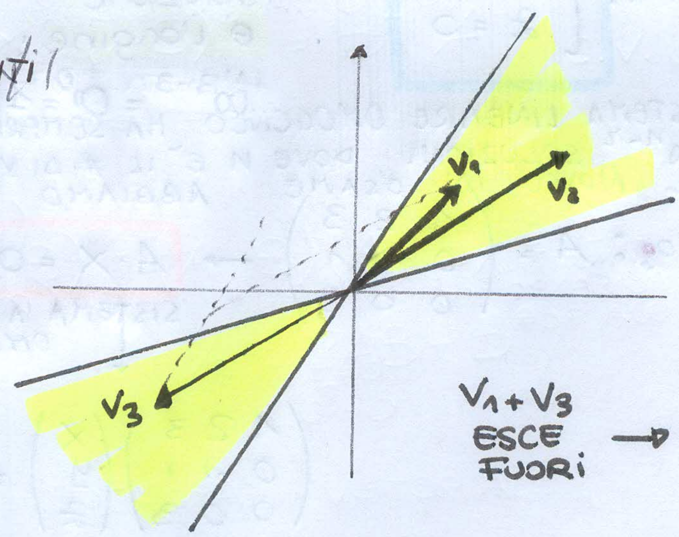
I SOTTOSPAZI VETTORIALI DI $\mathbb{R}^2$ SONO:



NO!

$R = v_1 + v_2$ ESCE

- $\mathbb{R}^2$
- $\{0\}$
- TUTTE LE RETTE PASSANTI PER L'ORIGINE
- ~~TUTTI I PIANI PASSANTI PER L'ORIGINE~~



$v_1 + v_3$ ESCE FUORI → NO!

I SOTTOSPAZI VETTORIALI DI $\mathbb{R}^3$ SONO:

(DIMOSTRARLO PER ESERCIZIO)

- $\mathbb{R}^3$
- $\{0\}$
- OGNI RETTA PASSANTE PER L'ORIGINE
- OGNI PIANO PASSANTE PER L'ORIGINE

~~ESEMPIO~~ ESERCIZIO (in $\mathbb{R}^n$): DETERMINARE I SOTTOSPAZI VETTORIALI DI $\mathbb{R}^n$

PROPOSIZIONE:

W è suo SOTTOSPAZIO VETTORIALE $\Leftrightarrow$ W è SPAZIO delle soluzioni di un **sistema lineare** omogeneo in n variabili

AD ESEMPIO SE CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE DI UNA RETTA PER L'ORIGINE NEL PIANO:

$ax + by = 0$ $\rightarrow$ sistema lineare omogeneo in 2 variabili (1 equazione)

- $\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ **Retta** NELLO SPAZIO TRIDIMENSIONALE È SPAZIO DELLE SOLUZIONI DI UN SISTEMA LINEARE OMOGENEO SE PASSA PER $(0,0,0)$

- **Piano di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine** è dato dall'equazione $ax + by + cz = 0$

  $\downarrow$

  sistema lineare omog. con 1 equazione e 3 variabili

ANCHE IL SOTTOSPAZIO NULLO PUÒ ESSERE SPAZIO DELLE SOLUZIONI DI UN SISTEMA LINEARE

AD ESEMPIO: $\boxed{\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}}$ $\rightarrow$ **Unica soluzione è l'origine**: INFATTI UN SISTEMA LINEARE OMOGENEO HA SEMPRE ∞^{n-r} SOLUZIONI, DOVE n È IL # DI VARIABILI E r È IL RANGO DEL SISTEMA: NEL CASO IN ESAME ABBIAMO $\infty^{3-3} = \infty^0 = 1$ SOLUZIONE.

NASCE da intersezione asse x, y, z

$\boxed{\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}}$

SE DIAMO: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $\boxed{A \cdot X = 0}$ con $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

SISTEMA ASSOCIATO OMOGENEO

$\downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

rango 3 (3 PIVOT)

ANCHE IL SISTEMA DETERMINATO, AVENDO 3 VARIABILI E RANGO 3, AMMETTE $\infty^{3-3} = \infty^0 = 1$ SOLUZIONE, QUELLA NULLA.

W sottospazio vettoriale di V si indica così:

$$W \leq V$$

è un suo sottospazio $\quad (\neq W \subset V)$ sottoinsieme

- **DEFINIZIONE**:

Dati ℓ vettori di V, $v_1, v_2, \dots, v_\ell$, si dice COMBINAZIONE LINEARE di tali elementi l'espressione $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_\ell v_\ell$ con $\alpha_j \in K$ $\forall j = 1, \dots, \ell$

ESEMPIO

Dati $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_2 \begin{pmatrix} -8 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ una loro combinazione lineare è $2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -8 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 4+\sqrt{3} \end{pmatrix}$ è combinazione lineare dei vettori dati (v_1, v_2)

- **DEFINIZIONE**:

1. I vettori $v_1, \dots v_\ell$ si dicono GENERATORI di uno spazio V se ogni vettore di V è una loro COMBINAZIONE LINEARE

2. Si dice SPAZIO GENERATO dai vettori $v_1, \dots, v_\ell$ l'insieme di tutti i vettori loro COMBINAZIONE LINEARE, e lo indichiamo così $\boxed{\langle\langle v_1, \dots, v_\ell \rangle\rangle}$

ESEMPIO:

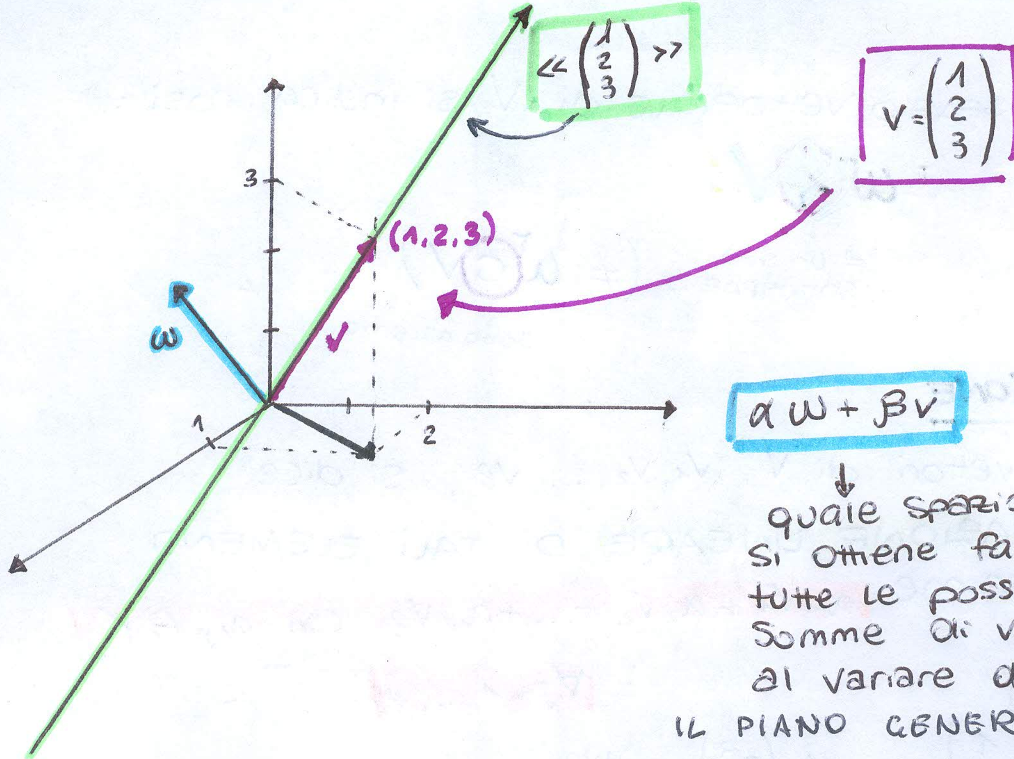
Sia $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \langle\langle v \rangle\rangle = ?$

v: vettore appartenente a $\mathbb{R}^3$

qual'è lo spazio generato da v?

$$\langle\langle v \rangle\rangle = \langle\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle\rangle = \left\{ n \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; n = \alpha v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$(\rightarrow$ SEGUE DISEGNO$)$



$\boxed{\alpha w + \beta v}$

↓

quale spazio si ottiene facendo tutte le possibili somme di vettori al variare di α e β?

IL PIANO GENERATO DA w e v!

PROPOSIZIONE:

Lo spazio $\ll v_1, \dots, v_e \gg \subset V$ spazio vettoriale su K, e' un suo SOTTOSPAZIO VETTORIALE

DIMOSTRAZIONE: DOBBIAMO DIMOSTRARE CHE:

1) DATI w_1 e $w_2 \in \ll v_1, \dots, v_e \gg \longrightarrow w_1 + w_2 \in \ll v_1, \dots v_e$

2) $\alpha w_1 \in \ll v_1, \dots, v_e \gg, \forall \alpha \in K$

e inoltre 3) $0 \in \ll v_1, \dots, v_e \gg$;

3) INFATTI $0 = 0v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_e$ ✓ VERIFICATO 3)

1) Se $w_1 \in \ll v_1, \dots, v_e \gg \rightarrow w_1 = \sum_{j=1}^{e} \alpha_j v_j$

e $w_2 \in \ll v_1, \dots, v_e \gg \rightarrow w_2 = \sum_{j=1}^{e} \beta_j v_j$

⇓

$$w_1 + w_2 = \sum_{j=1}^{e} \alpha_j v_j + \sum_{j=1}^{e} \beta_j v_j = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_e v_e + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_e v_e =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) v_2 + \dots + (\alpha_e \beta_e) v_e$$

↓

2) Se $w_1 = \sum_{j=1}^{e} \alpha_j v_j \Rightarrow \alpha w_1 = \sum_{j=1}^{e} (\alpha \alpha_j) v_j \in \ll v_1, \dots, v_e \gg$.

c.v.d

DEFINIZIONE:

ℓ vettori di uno spazio vettoriale V su K, $v_1, \dots, v_\ell$, si dicono **LINEARMENTE INDIPENDENTI** se l'unica loro combinazione lineare che da' il VETTORE NULLO, ha per coefficienti solo ZERI, cioe'

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_\ell v_\ell = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, \ell$$

"$\Leftarrow$" e' sempre vera

"$\Rightarrow$" e' da verificare

ESEMPIO: i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sono LINEARMENTE INDIPENDENTI ?

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta \\ 2\alpha + 4\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}} \longrightarrow$$

MATRICE ASSOCIATA (vettori nelle colonne)

rango 2
variabili 2

$$\infty^{2-2} = 1$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{matrix}}$$

DEFINIZIONE:

- Se sulla combinazione lineare posta = al vettore nullo, alcuni coefficienti sono $\neq 0$ $\rightarrow$ i vettori sono **LINEARMENTE DIPENDENTI**.