LEZIONE DEL 22/11/16

Studio delle funzioni (o applicazioni) che hanno come dominio e codominio sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

Studiamo più precisamente applicazioni tra strutture algebriche.

Date due strutture algebriche A, B (ad esempio A gruppo additivo e B gruppo moltiplicativo): voglio studiare le applicazioni tra esse, cioè $f: A \to B$, tali che rispettano le strutture su A e B. In altre parole considero quelle applicazioni $f: A \to B$ tali che, nell'esempio dato, $f(a_1 + a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2)$ $\forall a_1, a_2 \in A$.

Una simile applicazione è detta morfismo tra A e B. In generale abbiamo la definizione: date le strutture algebriche $(A, *)$ e $(B, \square)$ definisco morfismo tra A e B un'applicazione $f: A \to B \mid f(a_1 * a_2) = f(a_1) \square f(a_2)$.

Tuttavia non tutte le funzioni studiate sono morfismi:

Esempio. $f: (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$; mi domando se f è un morfismo tra le

$x \longmapsto 2x$

due strutture algebriche date.

Devo far vedere che $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, dunque

$2(x_1 + x_2) \overset{?}{=} 2x_1 \cdot 2x_2$. Uguaglianza non verificata $\Rightarrow$ f non è morfismo.

Esempio. $f: (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +)$; f è un morfismo?

$x \longmapsto 2x$

Devo far vedere che $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, dunque

$2(x_1 + x_2) \overset{?}{=} 2x_1 + 2x_2$. Uguaglianza verificata $\Rightarrow$ f è un morfismo.

Se $f: A \to B$ è biettiva allora f è detto isomorfismo. Se $f: A \to B$ è un morfismo suriettivo allora si parla di epimorfismo.

In particolare vogliamo studiare i morfismi tra spazi vettoriali: essi si chiamano applicazioni lineari.

Definizione. Dati due spazi vettoriali V e W definiti su un campo K, $L: V \to W$ è un'applicazione lineare se $L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2)$ $\forall v_1, v_2 \in V$ e $L(\alpha v) = \alpha L(v)$ $\forall v \in V$ e $\forall \alpha \in K$.

Valutiamo se alcune applicazioni date sono lineari o no.

Esempio. $L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; è lineare? sì

$x \longmapsto 2x$

1) $L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2) \Rightarrow 2(x_1 + x_2) = 2x_1 + 2x_2$ verificato

2) $L(\alpha x) = \alpha L(x) \Rightarrow 2(\alpha x) = \alpha(2x)$ verificato

per la proprietà commutativa

per la proprietà distributiva del $\cdot$ rispetto a $+$

$L_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; è lineare? No
$x \longmapsto x^2$

1) $(x_1+x_2)^2 \overset{?}{=} x_1^2+x_2^2 \Rightarrow (x_1+x_2)^2 \neq x_1^2+x_2^2$ non verificato

$(x_1+x_2)^2 = x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$

$L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; è lineare?

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x-y \\ 2x \\ 3x-2y \end{pmatrix}$

1) $L(v_1+v_2) \quad L(v_1)+L(v_2)$

$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow v_1+v_2 = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix} \Rightarrow L(v_1+v_2) = \begin{pmatrix} x+a-y-b \\ 2(x+a) \\ 3(x+a)-2(y+b) \end{pmatrix}$

$L(v_1)+L(v_2) = \begin{pmatrix} x-y \\ 2x \\ 3x-2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a-b \\ 2a \\ 3a-2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y+a-b \\ 2x+2a \\ 3x-2y+3a-2b \end{pmatrix}$

Si può affermare che $L(v_1+v_2) = L(v_1)+L(v_2)$ perché valgono le proprietà commutativa, distributiva, associativa su $\mathbb{R}$.

2) $L(\alpha v) = \alpha L(v) \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha x - \alpha y \\ 2\alpha x \\ 3\alpha x - 2\alpha y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x-y \\ 2x \\ 3x-2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - \alpha y \\ 2\alpha x \\ 3\alpha x - 2\alpha y \end{pmatrix}$

poiché valgono le proprietà di prima.

$L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x-y \\ 2x-1 \\ 3x-2y \end{pmatrix}$

1) $L(v_1+v_2) = \begin{pmatrix} x+a-y-b \\ 2(x+a)-1 \\ 3(x+a)-2(y+b) \end{pmatrix} \neq L(v_1)+L(v_2) = \begin{pmatrix} x-y+a-b \\ 2x+2a-2 \\ 3x-2y+3a-2b \end{pmatrix}$

Da quest'ultimo esempio si deduce che: un'applicazione tra spazi vettoriali espressa mediante le coordinate è **LINEARE** $\Leftrightarrow$ i polinomi nelle coordinate sono lineari e omogenei (o di primo grado. NELLE COORDINATE DEL DOMINIO)

Proprietà. Se $L: V \to W$ è lineare $\Rightarrow L(0) = 0$.

Infatti $L(0) = L(v-v) \Rightarrow L(v+(-v)) = L(v) + L(-v) = L(v) - L(v) = 0$

definizione di somma — definizione di prodotto per uno scalare

Considero $\{v \in V \mid L(v) = 0\} \subseteq V$ (insieme coincide con V per l'APPLICAZIONE nulla). Tale sottoinsieme si chiama nucleo o kernel dell'applicazione L, abbreviato "Ker L". $\operatorname{Ker} L < V$? Dimostrazione:

- $0 \in \operatorname{Ker} L$? Sì perché lo abbiamo dimostrato precedentemente

• Dati $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}\,L \Rightarrow v_1 + v_2 \in \mathrm{Ker}\,L$? sì

$L(v_1+v_2) = L(v_1) + L(v_2) = 0 + 0 = 0$

poiché L è lineare   perché v_1 e v_2 appartengono al Kernel

• Dati $v \in \mathrm{Ker}\,L$, $\alpha \in K \Rightarrow \alpha v \in \mathrm{Ker}\,L$?

$L(\alpha v) = \alpha L(v) = \alpha \cdot 0 = 0$ c.v.d.

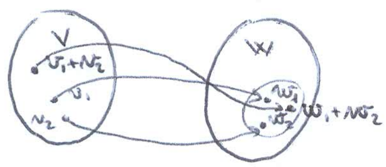
Immagine di L: $\mathrm{Im}\,L = \{ w \in W \mid \exists v \in V \mid L(v) = w \} \subseteq W$ (W è codominio).

$\mathrm{Im}\,L < W$? Dimostrazione:

• $0 \in \mathrm{Im}\,L$? sì

• Dati $w_1, w_2 \in \mathrm{Im}\,L \Rightarrow w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}\,L$? sì

Esiste v tale che $L(v) = w_1 + w_2 = L(v_1) + L(v_2) = L(v_1+v_2)$ con $v = v_1 + v_2$



• Dati $\alpha \in K$, $w \in \mathrm{Im}\,L \Rightarrow \alpha w \in \mathrm{Im}\,L$?

Esiste v tale che $L(v) = \alpha w = \alpha L(v_1) = L(\alpha v_1)$, quindi $\alpha v_1 = v$

poiché $w \in \mathrm{Im}\,L \Rightarrow \exists v_1 \mid L(v_1) = w$

Proposizione. $L : V \to W$ applicazione lineare tra spazi vettoriali è iniettiva $\iff \mathrm{Ker}\,L = \{0\}$

Dimostrazione: • "L iniettiva $\Rightarrow \mathrm{Ker}\,L = \{0\}$".

Supponiamo che $\mathrm{Ker}\,L \neq \{0\}$ cioè prendiamo $v \in \mathrm{Ker}\,L$ con $v \neq 0$ $\Rightarrow L(v) = 0$ ma anche $L(0) = 0$; poiché $v \neq 0$ allora L non sarebbe iniettiva e ciò è assurdo (perché due vettori v e vettore nullo avrebbero la stessa immagine).

• "$\Leftarrow$", voglio dimostrare che L è iniettiva, cioè presi v_1 e v_2, $v_1 \neq v_2 \Rightarrow L(v_1) \neq L(v_2)$ o analogamente se $L(v_1) = L(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$.

Parto dal supporre $L(v_1) = L(v_2) \Rightarrow L(v_1) - L(v_2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow L(v_1) + L(-v_2) = 0 \Rightarrow L(v_1 - v_2) = 0$, questo implica

che $v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}\,L$, ma per ipotesi in $\mathrm{Ker}\,L$ c'è solo $v = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$, c.v.d.