**Definizione:** 22/03/'17

Una forma bilineare $f: \bar{V} \times \bar{V} \to K$ é detta SIMMETRICA se
$F((v,w)) = F((w,v)) \ \forall\, v, w \in \bar{V}$

Se fisso una base $B_V$ in $\bar{V}$ $\Rightarrow$ posso costruire

$$[F]_{B_V} = \begin{pmatrix} F((v_1,v_1)) & F((v_1,v_2)) & \cdots \\ F((v_2,v_1)) & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$ immagini delle coppie dei vettori di base

**Osservazione 1**

$\to$ Se $F$ é simmetrica $\Rightarrow [F]_{B_V}$ é simmetrica

**Osservazione 2**

Cosa succede se cambio base? : Matrici congruenti ad una matrice simmetrica sono simmetriche. Infatti:

RICORDANDO CHE
$A$ simmetrica $\Leftrightarrow A^T = A$
E
$B \sim_c A \Leftrightarrow \exists\, S$ invertibile $/ B = S^T A S$

$\Rightarrow B^T = (S^T A S)^T = S^T A^T S = S^T A S = B$

$\Rightarrow B$ é simmetrica, cvd

**Definizione**

Una forma bilineare $F: \bar{V} \times \bar{V} \to K$ é detta ANTISIMMETRICA se
$F((v,w)) = -F((w,v)) \ \forall\, v,w \in \bar{V}$

**Osservazione 3**

Fissata $B_V$ in $\bar{V} \Rightarrow$ se $F$ é antisimmetrica $\Rightarrow [F]_{B_V}$ é antisimm.

**Definizione**

Una forma bilin. $F: \bar{V} \times \bar{V} \to K$ é detta ALTERNANTE se
$F((v,v)) = 0 \ \forall\, v \in \bar{V}$

Adesso abbiamo considerato il campo degli scalari $K$ : DOBBIAMO TENER CONTO DELLA SUA "caratteristica" : Ma cos'é? É il più piccolo numero naturale primo $p$ (oppure zero) tale che qualunque numero del campo sommato a se stesso $p$ volte dia come risultato l'elemento neutro del campo; SE NON SI TROVA TALE P ALLORA LA CARATTERISTICA È ZERO

1

I campi $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ hanno caratteristica $= 0$.

Considero invece $\mathbb{Z}_2 = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, che è un "campo ~~due~~ quoziente" i cui elementi sono classi di equivalenza della relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$ detta "resto modulo 2" e così definita:

- Considero $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$
- $\Rightarrow$ abbiamo 2 resti possibili per la divisione per 2: 0 opp. 1

$\rightarrow m = 2n + 0 \qquad m = 2n + 1$

Tale relazione definisce due sole classi di equivalenza, $\bar{0}$ e $\bar{1}$: in $\bar{0}$ ci sono gli interi pari, in $\bar{1}$ gli interi dispari

Insiemisticamente ABBIAMO un insieme (QUOZIENTE) con 2 elementi, $\bar{0}$ e $\bar{1}$, ma ora consideriamo la somma e la moltiplicazione tra questi due. Quando l'insieme è finito possiamo fare una tabella.

SOMMA

| $+$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

num. pari $(\in 0)$ + num. pari $(\in 0)$ = = num. pari
↳ quindi devo scrivere "0" perché rappresenta la classe di equivalenza dei numeri pari.

MOLTIPLICAZIONE

| $\cdot$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

L'insieme $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$, come si può vedere dalle tabelle, è un campo a tutti gli effetti (lo si usa per fare i circuiti: 0 chiuso, 1 aperto, + serie, $\cdot$ parallelo; si usa anche in informatica).

Come detto la caratteristica o è un numero primo (per un campo finito), oppure è 0. In questo caso la caratt. è 2.

**ESEMPIO**: Considero $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

A SECONDA DELLA CARATTERISTICA DEL CAMPO, I RISULTATI SONO DIVERSI!

$|A| = 2 \neq 0 \rightarrow$ quindi $A$ é invertibile. Ora prendiamo $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2)$, in cui le entrate sono i rappresentanti delle classi di equivalenza $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ per $\mathbb{R} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{Z}_2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ la matrice non é invertibile.

$A$ é invertibile con gli scalari in $\mathbb{R}$ ma non in $\mathbb{Z}_2$.

In un campo di caratteristica 2 non si puó "dividere per 2" $\rightarrow$ $\rightarrow$ infatti la classe di 2 é 0, e quindi non c'é nessun numero che moltiplicato per 2 mi dia un numero diverso da 0 (così come in $\mathbb{R}$ non ho niente che moltiplicato per 0 mi dia un numero $\neq 0$ = infatti in $\mathbb{R}$ non puoi dividere per 0).

---

In un campo di caratteristica zero una forma bilineare é alternante $\Leftrightarrow$ é antisimmetrica $F((v,w)) = -F((w,v))\ \forall v,w \in V$

In un campo di caratteristica 2 una forma bilineare é simmetrica $\Leftrightarrow$ é alternante

Noi scegliamo di continuare a lavorare con forme bilineari definite in campi con caratteristica = 0, ma non é sempre così e bisogna stare attenti.

**Definizione**

Sia $F: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare <u>simmetrica</u>; due vettori $\in V$ sono detti F. CONIUGATI opp. F. ORTOGONALI se $F((v,w)) = 0$

(se non fosse simmetrica avrei $F((w,v)) \neq F((v,w))$ e non potremmo dire se i due vettori sono F-coniugati o no).

**Osservazione**

Dati $k$ vettori $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ $\Rightarrow$ se $w$ é F-coniugato a $v_j$ $\forall j = 1, \dots, k$ $\Rightarrow$ $w$ é coniugato a tutte le loro combinazioni lineari.

La dimostrazione é banale usando la proprietá della linearitá sul primo vettore:
$$F\left(\left(\sum_j \alpha_j v_j, w\right)\right) = \sum_j \alpha_j \cdot F((v_j, w)) = \sum_j \alpha_j \cdot 0 = 0$$

Fissato $w \in V$ posso considerare l'insieme di tutti i vettori F-ortogonali a $w$: $w^\perp = \langle\langle w \rangle\rangle^\perp = \{ v \in V \mid F(v, w) = 0 \}$. **Definizione**

Questo $w^\perp$ é detto il COMPLEMENTO ORTOGONALE di $w$

Analogamente dato $W \leq V$ posso avere $W^\perp = \{ v \in V \mid F(v, w) = 0 \ \forall w \in W \}$

$W^\perp$ é un sottospazio di $V$. **Osservazione**

Facciamo un esempio:

$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \mapsto x_1 y_2 + x_2 y_1$

Determiniamo i vettori F-coniugati a $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dobbiamo prima capire 1) se F é bilineare, 2) F é simmetrica e dopo 3) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}^\perp$

1) F é definita da un polinomio di grado 2, omogeneo, di coordinate "miste"

2) $x_1 y_2 + x_2 y_1 = y_1 x_2 + y_2 x_1$. Opp. trova la base canonica della matrice associata e vedi che é simmetrica.

3) $F\left(\left(v, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right)\right) = 0 \Rightarrow F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}\right) = 0$

ottengo un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ $\to$ $-2x_1 + 3x_2 = 0$

infatti é una retta passante per l'origine