21/12/2016

Non è sempre vero che 2 matrici con stesso polinomio caratteristico sono simili.

<u>Controesempio</u> due matrici A, B con lo stesso polinomio caratteristico possono <u>non essere simili</u>

Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \text{ e}$$

$$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

Vediamo se $A \sim_S B$ cioè se $\exists\, S$ invertibile $\mid B = S^{-1}AS$

o equivalentemente $SB = SA$

Sia $S = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow SB = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix}$,

$AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow$ uguagliando

$$\begin{pmatrix} x & x+y \\ z & z+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ x+y = y \\ z = z \\ z+t = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ x = 0 \\ z = z \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix}$$ ma S non è invertibile poiché $|S| = 0$

$$\Downarrow$$

A, B non sono simili

SIA DATA LA MATRICE A — **ESERCIZIO**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$: ad A è associato l'operatore: *

* $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cerco $T(v)$ con $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con base canonica,

- $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+2y,\ 2y,\ -2x-2y-z)$

- $\operatorname{Ker} T = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid T(v) = 0\}$ cerco $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+2y \\ 2y \\ -2x-2y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Sigma_0 \begin{cases} x+2y=0 \\ 2y=0 \\ -2x-2y-z=0 \end{cases}$$ CERCHIAMO Sol $\Sigma_0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \underset{2R_1+R_3 \to R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{R_2-R_3 \to R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rango $= 3$

$$\infty^{n-rg} = \infty^{3-3} = \infty^0 \Rightarrow \operatorname{Ker} T = \{0\}$$

$\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^3$: ~~dim Ker~~ INFATTI PER IL TEOREMA DELLE DIMENSIONI $\dim \operatorname{Im} T = 3$. RICORDO IL TEOREMA

Teorema delle dimensioni

$$\underset{\overset{\|}{0}}{\dim \operatorname{Ker} T} + \dim \operatorname{Im} T = \underset{\overset{\|}{3}}{\dim \text{ dominio}} \, T$$

<u>L' applicazione è biettiva</u>

DARE LA MATRICE ASSOCIATA A T IN UNA

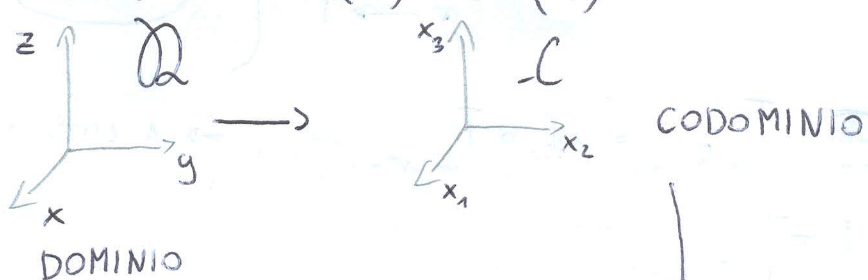
- Base di $\mathbb{R}^3$: SIA $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$

  diversa da quella canonica

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I vettori immagine sono dati nella base canonica del codominio $\Rightarrow$ CERCHIAMO LA LORO COMBINAZIONE LINEARE NELLA BASE $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$

① $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$



② $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

③ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$

3 sistemi lineari omogenei CHE POSSIAMO RISOLVERE CONTEMPORANEAMENTE

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & -6 & 1 \end{array}\right) \underset{2R_1 + R_3 \to R_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 6 & 1 \end{array}\right) \sim$$

COEFFICIENTI

TERMINI NOTI

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&1&6&0\\ 0&2&0&0&4&0\\ 0&0&1&-2&-2&-1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&2&0\\ 0&1&0&0&2&0\\ 0&0&1&-2&-2&-1\end{array}\right)$$

$R_2-R_3\to R_3$ $\qquad\qquad$ $R_1-2R_2\to R_1$

$\frac{R_2}{2}\to R_2$

È LA MATRICE CHE STAVO CERCANDO

$$[T]_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1&2&0\\ 0&2&0\\ -2&-2&-1\end{pmatrix}$$

SI PUÒ FARE ANCHE COSÌ:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = (x+2y,\ 2y,\ -2x-2y-z)$$

$A=[T]_{\mathcal{C}}$ cerco $[T]_{\mathcal{B}}$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^3,\mathcal{C}) \arrow[r, "T"] & (\mathbb{R}^3,\mathcal{C}) \arrow[d, "id_2"] \Rightarrow [T]_{\mathcal{C}}=A \\
(\mathbb{R}^3,\mathcal{B}) \arrow[u, "id_1"] \arrow[r] & (\mathbb{R}^3,\mathcal{B}) \Rightarrow \boxed{[T]_{\mathcal{B}}=B}
\end{tikzcd}$$

$v \longmapsto T(v)$

Conosco A, voglio trovare B

$T_{\text{in basso}} = id_2 \circ T_{\text{in alto}} \circ id_1 \Rightarrow$ A LIVELLO DELLE MATRICI:

$$[T]_{\mathcal{B}} = [id_2]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \cdot [T]_{\mathcal{C}} \cdot [id_1]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

La matrice associata $id_2 = (id_1)^{-1}$ è $[id_2]=[id_1]^{-1}$

$$[id_1]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1&2&0\\ 0&2&0\\ -2&-2&-1\end{pmatrix},\quad [T]_{\mathcal{C}} = A$$

cerco $[id_2]$

CIOÈ CERCO LA MATRICE INVERSA DI $[id_1]$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&1&0&0\\ 0&2&0&0&1&0\\ -2&-2&-1&0&0&1\end{array}\right) \longrightarrow [id_1]^{-1} = [id_2] \text{ è la}$$

MATRICE CHE RISULTA COMPOSTA DALLE ULTIME TRE COLONNE DELLA FORMA A GRADINI CANONICA DELLA MATRICE 3x6 SOPRA DATA

- Cerco gli autovalori di T : $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{2-\lambda} & \cancel{0} \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$

$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)(-1-\lambda)\right]$

$(2-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Rightarrow$ ho 3 radici caratteristiche

$\underline{\lambda_1 = 2}$, $\underline{\lambda_2 = 1}$ e $\underline{\lambda_3 = -1}$

$\mu(2) = \mu(1) = \mu(-1) = 1$ MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA

- Cerchiamo ora gli autospazi

Gli autospazi hanno tutti e 3 dimensione uguale ad 1, ESSENDO

$1 \leq \dim E_\lambda \leq \mu(\lambda) \Rightarrow \dim E_\lambda = 1 \ \forall \lambda$

$\Rightarrow \dim E_\lambda = \mu(\lambda) \Rightarrow$ la matrice è diagonalizzabile

$E_2 : \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ USANDO $\lambda_1 = 2$

Gli autospazi stanno tutti nel dominio, sono sottospazi invarianti del dominio.

$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -2x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$ disegnamola, cerco l'equazione parametrica

poniamo $2y = x$

$-3x = 3z$

$-x = z$

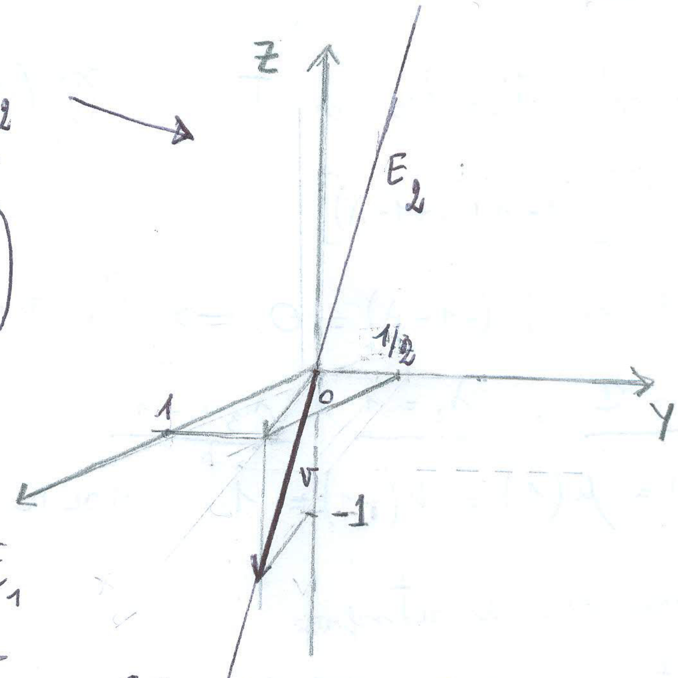
$\begin{cases} 2y = x \\ z = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{2} \\ z = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{2} \\ z = -t \end{cases} \Rightarrow$

ecco l'equazione parametrica

EQUAZIONE VETTORIALE

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} t$ BASE DI E_2

disegnamo la retta E_2 →



$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ -2x - 2y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \text{BASE DI } E_1$$

$$E_{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 3y = 0 \\ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_{E_{-1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \text{BASE DI AUTOVETTORI}$$

$$D = [T]_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

MATRICE COMPOSTA DALLE COORDINATE DEGLI AUTOVETTORI DI BASE

• Trovare $S \mid D = S^{-1} A S \rightarrow [id]^{\mathcal{C}}_{\tilde{\mathcal{B}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$