20/03/2017

FORME BILINEARI

Sia V uno spazio vettoriale n-dimensionale, fissiamo una base in V, $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e sia $F: V \times V \to K$ forma bilineare.

Posto $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [v]_{B_V}$ e $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = [w]_{B_V}$

$\Rightarrow$ $$F((v,w)) = \sum_{i,j=1}^{n} F((\underline{\underline{v_i, v_j}})) x_i y_j$$

$\to$ vettori della base scelta.

Se costruiamo la matrice $[F]_{B_V} = \begin{pmatrix} F((v_1,v_1)) & F((v_1,v_2)) & \dots & F((v_1,v_n)) \\ F((v_2,v_1)) & F((v_2,v_2)) & \dots & F((v_2,v_n)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F((v_n,v_1)) & F((v_n,v_2)) & \dots & F((v_n,v_n)) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ si nota subito che: $\boxed{F((v,w)) = X^T [F]_{B_V} Y}$

Esempio

$F: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) \longmapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$

$\to$ Dimostriamo che é forma bilineare:

1) $F((\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w)) = \alpha_1 F((v_1, w)) + \alpha_2 F((v_2, w))$

2) $F((v, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2)) = \beta_1 F((v, w_2)) + \beta_2 F((v, w_1))$.

$\Rightarrow$ posto $v_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ vettori generici di $\mathbb{R}^2$, verifico le proprietá 1) e 2).

1) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1 \\ \alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow F((\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w)) = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1) c_2 - (\alpha_1 a_2 + \alpha_2 b_2) c_1 =$

$= \alpha_1 a_1 c_2 + \alpha_2 b_1 c_2 - \alpha_1 a_2 c_1 - \alpha_2 b_2 c_1.$

$\alpha_1 F((v_1, w)) + \alpha_2 F((v_2, w)) = \alpha_1 (a_1 c_2 - a_2 c_1) + \alpha_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) =$

$= \alpha_1 a_1 c_2 - \alpha_1 a_2 c_1 + \alpha_2 b_1 c_2 - \alpha_2 b_2 c_1.$

$\to$ sono uguali perché vale la proprietà commutativa in $\mathbb{R}$.

2) Dim. analoga a 1)

$\Rightarrow$ L'applicazione data è forma bilineare.

$\to$ In $\mathbb{R}^2$ prendo la base canonica $\mathcal{C} = \left\{ \overset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$

$\Rightarrow [F]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} F((e_1, e_1)) & F((e_1, e_2)) \\ F((e_2, e_1)) & F((e_2, e_2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X^T [F]_{\mathcal{C}} Y = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$ $\to$ risultato deve essere uno scalare.

$\to$ X deve essere trasposta, altrimenti non si può fare il prodotto tra matrici.

$= (-x_2, x_1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -x_2 y_1 + x_1 y_2.$

$\to$ per la proprietà commutativa $= x_1 y_2 - x_2 y_1$.

$\Rightarrow$ si conosco l'immagine dell'applicazione per un vettore generico, quindi si conosco l'applicazione F.

Se cambio la base in V, e prendo $\tilde{B}_V \Rightarrow$ cambia la matrice associata ad F, $[F]_{\tilde{B}_V} \neq [F]_{B_V}$.

$F((v_1, v_1)) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \to 2 - 2 = 0$

Se prendo, nell'esempio dato, $\tilde{B}_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow F_{\tilde{B}_{\mathbb{R}^2}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ma facendo $X^T [F]_{\tilde{B}_V} Y$ non trovo LA STESSA ESPRESSIONE ANALITICA DI F.

$[F]_{\tilde{B}_V} \neq [F]_{B_V} \Rightarrow$ come sono legate tra loro?

Abbiamo $F((v,w)) = X^T [F]_{B_V} Y \Rightarrow$ cambio base in V, prendo $\tilde{B}_V$

$\Rightarrow$ se $[v]_{B_V} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow [v]_{\tilde{B}_V} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ dove detta S la matrice

invertibile del cambiamento di base: $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = SX = S \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

e analogamente: $Y' = [w]_{\tilde{B}_V} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow F((v,w)) = [v]^T_{\tilde{B}_V} [F]_{\tilde{B}_V} [w]_{\tilde{B}_V} = (X')^T [F]_{\tilde{B}_V} Y' = (SX)^T [F]_{\tilde{B}_V} SY =$

$= X^T S^T [F]_{\tilde{B}_V} S Y = X^T [F]_{B_V} Y \quad \forall v,w \in V \Rightarrow \boxed{S^T [F]_{\tilde{B}_V} S = [F]_{B_V}}$

Definizione: Due matrici A e B quadrate sul campo K, $A, B \in M_{n\times n}(K)$, sono dette **CONGRUENTI** se $\exists$ una matrice $S \in M_{n\times n}(K)$, invertibile, t.c. $B = S^T A S$.

Osservazione: Due matrici associate alla stessa forma bilineare in basi diverse dello spazio vettoriale sono CONGRUENTI.

(Come per le applicazioni lineari il cambiamento di base si potrebbe fare anche attraverso il diagramma commutativo, ma non sarebbe facile e lineare come nel caso in cui si hanno solo applicazioni lineari.)

Proposizione: La relazione di congruenza tra matrici quadrate è di **EQUIVALENZA**. (come avevamo già trovato per la relazione di equivalenza e di similitudine tra matrici)

$\boxed{\text{DA FARE}}$

DETERMINANTI di MATRICI CONGRUENTI:

$A \sim_c B \iff \exists\ S$ invertibile $|\ B = S^T A S$ ($\sim_c$ indica la relazione di congruenza).

$\Rightarrow |B| = |S^T A S| = |S^T||A||S| = |S||A||S| = |S|^2 |A|$.

$\hookrightarrow |A|$ e $|B|$:
- hanno tutti det nullo
- hanno tutti det negativo
- hanno tutti det positivo

e differiscono per un quadrato.

$\Rightarrow$ il rango di matrici congruenti si mantiene!

Proposizione: matrici congruenti hanno lo stesso rango.

(come avevamo dimostrato anche per matrici simili).

Per dimostrarlo, non avendo significati geometrici, dobbiamo andare avanti algebricamente.

Lemma: Siano $A, S \in M_{n \times n}(K)$, S invertibile ($\Rightarrow$ rg S massimo),

$\Rightarrow rg(AS) = rg(SA) = rg(A)$.

Dimostrazione:

Dim che $rg(AS) = rg A \Rightarrow$ le colonne della matrice AS sono una combinazione lineare delle colonne di $A \Rightarrow rg(AS) \leq rg A$

Ora considero il prodotto $(AS)S^{-1} \Rightarrow$ le colonne di $(AS)S^{-1}$ sono combinazione lineare delle colonne di $AS \Rightarrow rg((AS)S^{-1}) \leq rg(AS)$

Ma dato che $(AS)S^{-1} = A \Rightarrow \boxed{rg(A) = rg(AS)}$

Analogamente (scambiando righe con le colonne della dim. precedente) si dimostra che: $\boxed{rg(SA) = rg(A)}$

$\Rightarrow$ Proposizione, matrici congruenti hanno lo stesso rango, è una conseguenza immediata del Lemma ($rg(AS) = rg(SA) = rg(A)$).

DIMOSTR. Siano $B \sim_c A \Rightarrow \exists S$ invertibile t.c. $B = S^T A S$

$\Rightarrow rg B = rg(S^T A S) = rg(S^T(AS)) = rg(AS) = rg A$.

c.v.d.

$\Rightarrow$ Tutte le matrici congruenti hanno lo stesso rango, tale rango è detto rango della forma bilineare rappresentata da tali matrici.

($\Rightarrow$ "forma bilineare era rg massimo, vuol dire che ogni matrice associata alla forma bilineare data ha rango massimo).