18/10/2016

PROPOSIZIONE Se $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ e supponiamo che il determinante di $A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ inversa di A

$$\boxed{|A| = \text{Det} A = D(A) = |A|}$$

DIMOSTRAZIONE cerco la matrice A^{-1} cioè la matrice incognita X tale che $AX = I$ — MATRICE IDENTITÀ

~~Possio~~ Pongo $X = (x_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ mentre $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ considero il prodotto AX, è una matrice le cui entrate sono $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} \Rightarrow$ impongo $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij}$

δ_{ij} è delta di Kroneker e VALE $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$

così abbiamo imposto che ~~I = matrice identità~~ la matrice risultante ~~sia~~ uguale ad I

$\to n$ RIGHE PER LA 1° COLONNA

$$\Sigma_1 \begin{cases} a_{11} x_{11} + a_{12} x_{21} + \dots + a_{1n} x_{n1} = 1 \\ a_{21} x_{11} + a_{22} x_{21} + \dots + a_{2n} x_{n1} = 0 \\ \vdots \\ a_{n1} x_{11} + a_{n2} x_{21} + \dots + a_{nn} x_{n1} = 0 \end{cases}$$

n equazioni in n incognite $(x_{11}, x_{21} \dots)$

$\hookrightarrow$ Il suo rango ~~sarà~~ è n e le sue variabili sono altrettante $\Rightarrow$

$\mathrm{Sol}\,\Sigma_1 = \infty^{n-n} = 1$

$$\Sigma_2 \begin{cases} a_{11} x_{12} + a_{12} x_{22} + \dots + a_{1n} x_{n2} = 0 \\ a_{21} x_{12} + a_{22} x_{22} + \dots + a_{2n} x_{n2} = 1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_{12} + a_{n2} x_{22} + \dots + a_{nn} x_{n2} = 0 \end{cases}$$

$\to$ OGNUNA DELLE n RIGHE PER LA 2° COLONNA $\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} a_{11}x_{1n} + a_{12}x_{2n} + \dots + a_{1n}x_{nn} = 0 \\ a_{21}x_{1n} + a_{22}x_{2n} + \dots + a_{2n}x_{nn} = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_{1n} + a_{n2}x_{2n} + \dots + a_{nn}x_{nn} = 1 \end{cases}$$

OGNUNA DELLE n RIGHE PER LA n-esima COLONNA $\begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$

Ogni sistema lineare ha rango n e ci dà $Sol\ \Sigma_J = \infty^{n-n} = 1$ una unica soluzione, le soluzioni trovate danno le colonne della matrice A^{-1}

1° metodo per determinare la matrice inversa di A usando le operazioni elementari riga su A

OSSERVAZIONE Chiamo "e" una qualunque operazione elementare $\Rightarrow A' = e(A) = (e(I)) \cdot A$ dove I è una opportuna matrice identità cioè se $A \in \mathcal{M}_{K\times n} \Rightarrow I \in \mathcal{M}_{K\times K}$

ESEMPIO

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ ED e sia la moltiplicazione $2 \cdot R_1 \to R_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow e(A) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}_{2\times 3}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2},$$

$$e\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

PROPOSIZIONE Siano $e_1, e_2, e_3 \dots e_K$ operazioni elementari eseguite in successione $\Rightarrow$ $\cancel{e_K(e_{K-1}(e_{K-2}(e_2(e_1(A))))\dots)}$

$$\Rightarrow e_K(e_{K-1}(e_{K-2}(\dots \underbrace{e_2(e_1(A))}_{}\dots))) = e_K(e_{K-1}(e_{K-2}(\dots(e_2(e_1(I)))\dots))) \cdot A$$

DIMOSTRAZIONE:

$$e_2(e_1(I)\cdot A)$$

$$e_2(I)\,e_1(I)\cdot A$$

$$e_3(I)\,e_2(I)\,e_1(I)\cdot A$$

$$e_K(I)\,e_{K-1}(I)\dots \underbrace{e_2(I)\,e_1(I)\cdot A}$$

$$e_K(I)\dots \qquad e_2(e_1(I))\cdot A \quad \Rightarrow \text{ E COSÌ A RITROSO}$$

$$e_K(e_{K-1}(\dots(e_2(e_1(I)))\dots))\cdot A$$

C.V.D.

PROPOSIZIONE

Se una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ ha determinante non nullo $\Rightarrow$ il suo rango è n

Infatti si ha questa ulteriore definizione di rango di una matrice A

DEFINIZIONE:

Il rango è l'ordine massimo dei minori non nulli della matrice, dove minore indica il determinante di sottomatrici quadrate.

Esempio di minori di ordine 2 di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

preso $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$ (è minore di ordine 2)

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$

3 minori di ordine 2 in A: $-3; -6; -3$

6 ~~minori~~ minori di ordine 1: $1; 2; 3; 4; 5; 6$

$\Rightarrow$ L'ordine massimo dei minori non nulli di A è 2

ESEMPIO:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Trovare il suo rango}$$

n.° di pivot — l'ordine massimo dei minori non nulli

$\hookrightarrow$ Se il determinante della sottomatrice 3x3 (coincidente con la matrice stessa) fosse $\neq 0$ allora il rango della matrice sarebbe 3.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 - 8 \neq 0$$

OK

L'ordine massimo dei minori non nulli della precedente matrice è quindi 3.

OSSERVAZIONE:

Ogni matrice $n \times n$ con determinante non nullo è equivalente alla matrice identità. Cioè la MATRICE RIDOTTA A GRADINI IN FORMA CANONICA (OTTENUTA CON il metodo di riduzione di Gauss) è la matrice $I_{n\times n}$.

PROPOSIZIONE

Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ con rango massimo possibile, cioè con $\det A \neq 0 \Rightarrow$

$$\underbrace{e_k(e_{k-1}(e_{k-2}(\dots(e_2(e_1(A)))\dots)))}_{\parallel} = I$$

$$e_k(e_{k-1}(e_{k-2}(\dots(e_2(e_1(I)))\dots))) \cdot A = I$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{e_k(e_{k-1}(e_{k-2}(\dots(e_2(e_1(I)}$$

$$\Rightarrow e_K(e_{K-1}(\dots(e_2(e_1(I)))\dots)) = A^{-1}$$

$\Rightarrow$ Operativamente per determinare A^{-1} ~~ricavio~~ ricaviamo

$$(A \vdots I) = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} & \vdots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & \vdots & & 1 & \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nn} & \vdots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{n \times 2n}$$

mediante operazioni elementari riga ~~[illegible]~~ RIDUCIAMO LA MATRICE A A FORMA CANONICA $\Rightarrow$ LA MATRICE IDENTITÀ SARÀ RIDOTTA ALLA MATRICE A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 \dots & 0 \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & 1 & & \vdots & & \vdots \\ & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{array}\right)$$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{determinare } A^{-1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_1 + R_3 \to R_3$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{4R_2 + R_3 \to R_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{\substack{6R_2-R_3\to R_2\\4R_1-R_3\to R_1}}{\sim}\begin{pmatrix}4 & 8 & 0 & 3 & -4 & -1\\0 & -6 & 0 & -1 & 2 & -1\\0 & 0 & 12 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix}\sim$$

$3R_1+4R_2\to R_1$

$$\sim\begin{pmatrix}12 & 0 & 0 & 5 & -4 & -7\\0 & -6 & 0 & -1 & 2 & -1\\0 & 0 & 12 & 1 & 4 & 1\end{pmatrix}\underset{R_3/12\to R_3}{\overset{\substack{R_1/12\to R_1\\R_2/-6\to R_2}}{\sim}}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 5/12 & -1/3 & -7/12\\0 & 1 & 0 & 1/6 & -1/3 & 1/6\\0 & 0 & 1 & 1/12 & 1/3 & 1/12\end{array}\right)$$

Sia $A \in \mathcal{M}_{n\times n} \Rightarrow A = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & \cdots & & \vdots\\\vdots & & & \\a_{n1} & \cdots & & a_{nn}\end{pmatrix}$

DEFINIZIONE

Considerato l'elemento a_{ij} della matrice si dice COMPLEMENTO ALGEBRICO di a_{ij} il numero $(-1)^{i+j}|A_{\hat{ij}}|$

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{ij} \end{pmatrix}$ ~~dove~~ b_{ij} è ottenuto così

presa la trasposta di A, $A^T = C \Rightarrow$

$\Rightarrow b_{ij} = [(-1)^{i+j}|C_{\hat{ij}}|]/|A|$ b_{ij} è l'entrata di A^{-1}