17/05/2017

METRICA: tutto ciò che riguarda la misura che si può fare in un determinato spazio.

CON ALCUNE applicazioni la metrica non cambia | APPLICAZIONI ISOMETRICHE

Ora si considerano gli operatori isometrici.

- TEOREMA DI STRUTTURA DEGLI OPERATORI ISOMETRICI (di uno spazio euclideo n-dimensionale reale)

Sia $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ operatore isometrico $\Rightarrow \exists\ B_{1n}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla quale

$$[T]_{B_{1n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & 0 & \\ & & & & -1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \cdots & 0 \\ & & 0 & & & & & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \cdots & 0 \\ & & & & & & & 0 \cdots 0 & \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \cdots & 0 \\ & & & & & & & 0 \cdots 0 & \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \cdots & 0 \\ 0 & & & & & & & & 0 & \ddots & M_l \end{pmatrix}_{n \times n}$$

dove $M_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}$

DIMOSTRAZIONE per induzione su n = dimensione spazio ambiente

VERIFICA PER:

1) $n=1$ $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che operatore ISOMETRICO è? Si sa che T è lineare $\Rightarrow T(x) = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Poiché T è isometrico $\Rightarrow \alpha = 1$ o $\alpha = -1$ $\Rightarrow$ si ha $T_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid T_1(x) = x$ e $T_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid T_2(x) = -x$

. $T_1(x) = id(x) \Rightarrow [T_1]_{\mathcal{E}} = (1) = I$

. $T_2(x) = -x$ — Simmetria (centrale) rispetto all'origine 0

-x   0   x

$[T_2]_{\mathcal{E}} = (-1) = -I$

2) Si verifica il caso $\boxed{n=2}$ (FACOLTATIVO)

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ si mette la base canonica $\Rightarrow [T]_{\mathcal{E}} = A$ con A ortogonale. (i vettori devono essere ortonormali)

Quindi posta $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ab + cd = 0 \\ a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$

Si risolve il sistema: si suppone $b \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{cd}{b} \\ \frac{c^2 d^2}{b^2} + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{cd}{b} \\ c^2(d^2 + b^2) = b^2 \\ d^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{cd}{b} \\ c^2 = b^2 \\ d^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{cd}{b} \\ c = \begin{smallmatrix} b \\ -b \end{smallmatrix} \\ d^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

Si ottengono due sistemi:

$$\begin{cases} a = -\frac{cd}{b} \\ c = b \\ d^2 + b^2 = 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} a = -\frac{cd}{b} \\ c = -b \\ d^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

Si considera il primo sistema con $c=b$:

$$\Rightarrow \begin{cases} c=b \\ a=-d \\ d^2+b^2=1 \rightarrow a^2+b^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \text{ con } a^2+b^2=1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Si considera il secondo sistema con $c=-b$:

$$\Rightarrow \begin{cases} c=-b \\ a=d \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ con } a^2+b^2=1$$

Si prosegue considerando la seconda matrice:

sia $a=\cos\theta$ e $b=\sin\theta$ con $0<\theta<\pi$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

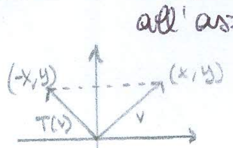
Supponendo invece $b=0$, si ottiene il sistema:

$$\Rightarrow \begin{cases} cd=0 \\ d^2=1 \\ a^2+c^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=\pm 1 \\ a=\pm 1 \end{cases}$$

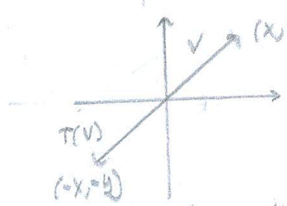
Si ottengono tutte le possibili matrici:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= I}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Simmetria assiale rispetto all'asse } y}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Rotazione di angolo } \pi}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Simmetria assiale rispetto all'asse } x}$$

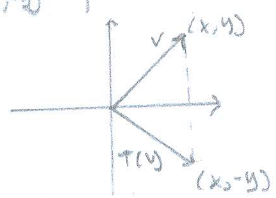
$$T_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$



$$T_2 : \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$



$$T_3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$



$$T_4 : \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta x & -\sin\theta y \\ \sin\theta x & \cos\theta y \end{pmatrix}$$ rotazione di angolo θ, $0<\theta<\pi$

$$T_5 : \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ Si tratta di una composizione di rotazione e simmetria

Si sono trovate tutte le matrici che classificano tutti i possibili operatori isometrici in $\mathbb{R}^2$.

Le rotazioni hanno $\det = 1$

Le simmetrie e composizioni DI ROTAZIONI E SIMMETRIE hanno $\det = -1$

Supponiamo dimostrato il Teorema per spazi con dimensione $< n$ e dimostriamolo per uno spazio di dimensione n

1° caso) Supponiamo che $\exists$ una radice caratteristica reale di A,

$\lambda_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ o $\lambda_0 = 1$ o $\lambda_0 = -1$.

Si v autovettore relativo a $\lambda_0 \Rightarrow T(v) = \pm v$

$\Rightarrow \langle\langle v \rangle\rangle$ è invariante per T e ha $\dim = 1$

$\Rightarrow \langle\langle v \rangle\rangle^\perp$ è invariante per T e ha $\dim\ n-1$,

posso considerare $T\Big|_{\langle\langle v \rangle\rangle^\perp} \quad \langle\langle v \rangle\rangle^\perp \to \langle\langle v \rangle\rangle^\perp$

è ancora isometrico $\Rightarrow$ per ipotesi induttiva $\exists\ \mathcal{B}'_{\perp n}$ di $\langle\langle v \rangle\rangle^\perp$

t.c. $\left[T|_{\langle\langle v \rangle\rangle^\perp}\right]_{\mathcal{B}'_{\perp n}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & M_1 & \\ & & & & & & \ddots\ M_q \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$

Considero una base di $\mathbb{R}^n = \left\{\frac{v}{\|v\|}\right\} \cup \mathcal{B}'_{\perp n}$ essendo $\mathbb{R}^n = \langle\langle v \rangle\rangle \oplus \langle\langle v \rangle\rangle^\perp$

Tale base $\mathcal{B}_{\perp n}$ è ortogonale e $[T]_{\mathcal{B}_{\perp n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \left[T|_{\langle\langle v \rangle\rangle^\perp}\right] & \\ 0 & & & \end{pmatrix}_{n\times n}$

concluso il caso 1.

2) caso SUPPONIAMO CHE $\nexists$ RADICI CARATTERISTICHE REALI DI A

ma sia $\lambda_0 \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \Rightarrow$

$\lambda_0 = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: dimostriamo che esiste un sottospazio invariante di dimensione 2.

Considero il polinomio caratteristico $p_T(\lambda)$, $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ $\beta \neq 0$ sia una sua radice; Posto $A = [T]_{\text{canonica}}$

$\Rightarrow p_T(\lambda_0) = |A - \lambda_0 I| = 0 \Rightarrow$ Il sistema lineare omogeneo $(A - \lambda_0 I)\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ha una soluzione non banale $Z = Z_x + i Z_y \in \mathbb{C}^n$, con $Z_x, Z_y \in \mathbb{R}^n$ $\Rightarrow$ posto $[Z_x]_e = X$ e $[Z_y]_e = [Y]$

abbiamo $(A - \lambda_0 I)(X + iY) = 0$

$$A(X+iY) = \lambda_0 I (X+iY)$$

$$A(X+iY) = (\alpha + i\beta) I (X+iY) = (\alpha+i\beta)(X+iY)$$

$$AX + iAY = \alpha X - \beta Y + i(\beta X + \alpha Y)$$

$\Rightarrow$ devono essere uguagliate le parti reali e le parti immaginarie dei due numeri complessi

$$\Rightarrow \begin{cases} AX = \alpha X - \beta Y \\ AY = \beta X + \alpha Y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} T(Z_x) = \alpha Z_x - \beta Z_y \\ T(Z_y) = \beta Z_x + \alpha Z_y \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $V := \langle\langle Z_x, Z_y \rangle\rangle$ = sottospazio generato dei vettori Z_x e Z_y è invariante per T, poiché $T(V) \subseteq V$

Dimostriamo che Z_x e Z_y sono linearmente indipendenti:

Per assurdo, supponiamo $Z_y = \lambda Z_x$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 1) \; T(Z_x) = \alpha Z_x - \beta \lambda Z_x = (\alpha - \beta\lambda) Z_x \\ 2) \; T(Z_y) = T(\lambda Z_x) = \lambda T(Z_x) = \beta Z_x + \alpha(\lambda Z_x) = (\beta + \alpha\lambda) Z_x \end{cases}$$

moltiplichiamo 1) per λ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} 1') \; \lambda T(Z_x) = (\lambda\alpha - \beta\lambda^2) Z_x \\ 2) \; \lambda T(Z_x) = (\beta + \alpha\lambda) Z_x \end{cases} \Rightarrow \text{uguagliamo i secondi membri}$$

$$\Rightarrow (\lambda\alpha - \beta\lambda^2) Z_x = (\beta + \alpha\lambda) Z_x \Rightarrow$$

$$-\beta\lambda^2 Z_x = \beta Z_x \Rightarrow -(\beta\lambda^2 + \beta) Z_x = 0 \quad \text{ma } Z_x \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\beta(\lambda^2 + 1) = 0$: ma $\beta \neq 0$ perché $\lambda_0 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ assurdo perché $\lambda \in \mathbb{R}$!

$\Rightarrow$ Z_X e Z_Y sono linearmente indipendenti

e quindi $\dim V = \dim \langle\langle Z_X, Z_Y \rangle\rangle = 2$: posso considerare

$\mathcal{B}_V = \{Z_X, Z_Y\}$ $\Rightarrow$ se $T_1 = T|_V$ abbiamo che

$$[T_1]_{\mathcal{B}_V} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = A_2$$

Inoltre sappiamo che $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, perché è la norma dell'autovalore $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, che essendo autovalore di un operatore isometrico, deve avere norma unitaria

$\Rightarrow$ T_1 è invertibile e $[T_1^{-1}]_{\mathcal{B}_V} = [T_1]_{\mathcal{B}_V}^{-1} =$

$$= A_2^{-1} = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow A_2^{-1} = A_2^T$$

$\Rightarrow$ A_2 è ortogonale

$T_1 = T|_V$ è un operatore isometrico su V $\Rightarrow$

$$T_1(Z_X) \cdot Z_X = Z_X \cdot T_1^{-1}(Z_X)$$

$$\| $$

$$(\alpha Z_X - \beta Z_Y) \cdot Z_X = Z_X \cdot (\alpha Z_X + \beta Z_Y)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$\alpha(\cancel{Z_X \cdot Z_X}) - \beta(Z_Y \cdot Z_X) = \alpha(\cancel{Z_X \cdot Z_X}) + \beta(Z_X \cdot Z_Y) \Rightarrow \beta(Z_X \cdot Z_Y) = 0$$

essendo $\beta \neq 0$ $\Rightarrow$ $Z_X \cdot Z_Y = 0$ $\Rightarrow$ Z_X e Z_Y sono ortogonali

Si dimostra che $\|Z_X\|^2 = \|Z_Y\|^2$:

$$T_1(Z_X) \cdot Z_Y = Z_X \cdot T_1^{-1}(Z_Y)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$(\alpha Z_X - \beta Z_Y) \cdot Z_Y = Z_X \cdot (-\beta Z_X + \alpha Z_Y)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad \|$$

$$\alpha(\cancel{Z_X \cdot Z_Y}) - \beta(Z_Y \cdot Z_Y) = \alpha(\cancel{Z_X \cdot Z_Y}) - \beta(Z_X \cdot Z_X) \Rightarrow \cancel{\beta}\|Z_Y\|^2 = \cancel{\beta}\|Z_X\|^2$$

$\Rightarrow$ posto $\|Z_x\| = \|Z_y\| = \mu \neq 0$, prendiamo come base B'_V dello spazio V, formata dai vettori ortonormali w_1 e w_2 con $w_1 = \frac{Z_x}{\mu}$ e $w_2 = \frac{Z_y}{\mu}$; avremo $[T_1]_{B'_V} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

poiché $T_1(w_1) = \frac{1}{\mu} T(Z_x) = \alpha \frac{Z_x}{\mu} - \beta \frac{Z_y}{\mu} = \alpha w_1 - \beta w_2$

e $T_1(w_2) = \frac{1}{\mu} T(Z_y) = \beta \frac{Z_x}{\mu} + \alpha \frac{Z_y}{\mu} = \beta w_1 + \alpha w_2$

$$\Rightarrow \quad [T_1]_{B'_V} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Considero $V^\perp$, invariante per T, e per ipotesi di induzione, essendo $\dim V^\perp = n-2$, esiste una base ortonormale $B_{V^\perp}$, rispetto alla quale la matrice $[T|_{V^\perp}]_{B_{V^\perp}}$ ha la forma richiesta.

Ora considero in $\mathbb{R}^n$ la base $B_{V^\perp} \cup B'_V = B \Rightarrow$ la matrice associata a T in tale base sarà:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T|_{V^\perp}]_{B_{V^\perp}} & \\ & \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\operatorname{sen}\vartheta \\ \operatorname{sen}\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

come volevasi dimostrare.

QUESTO CONCLUDE LA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA ■