15/11/2016

Dato uno spazio vettoriale V ($\dim V = n$) e due sottospazi U e V con $\dim U = p$ e $\dim V = q \Rightarrow$

$\Rightarrow$ considero i sottoinsiemi $\underline{U \cap V}$ e $\underline{U \cup V}$

<u>Ci domandiamo se $U \cap V$ e $U \cup V$ sono sottospazi di W</u>

Considero $U \cap V$ con un esempio: $W = \mathbb{R}^3$,

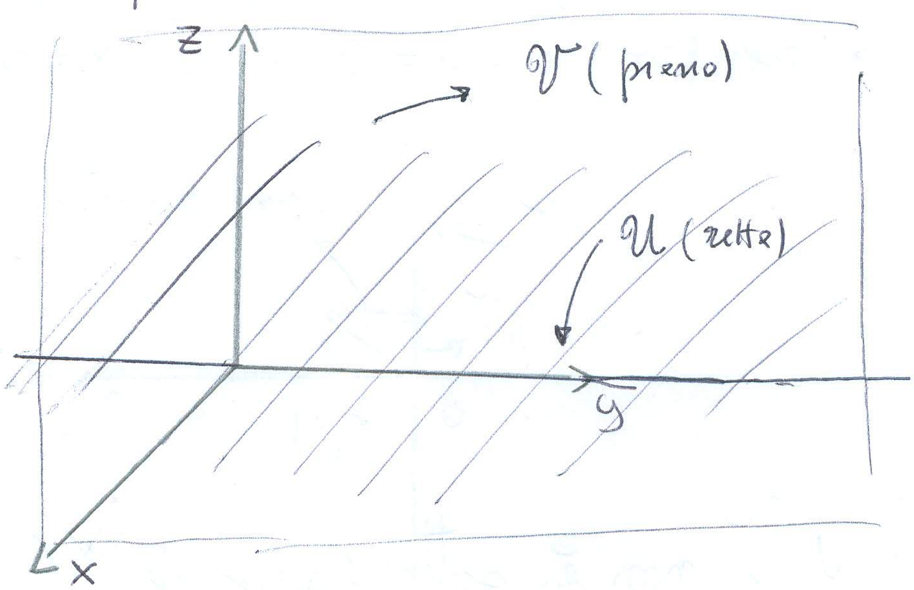
ESEMPIO 1)

$U =$ una retta di $\mathbb{R}^3$ per O, e $V =$ un piano di $\mathbb{R}^3$, per O

$U: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$V: x = 0$

$U \cap V$ è la retta $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$



$U \cap V$ è sottospazio vettoriale di W se

① $O \in U \cap V$: $U \cap V = \{ v \in W \mid v \in U$ e $v \in V \} \Rightarrow O \in U$ e $O \in V \Rightarrow O \in U \cap V$

② Dati $v_1, v_2 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \Rightarrow v_1 + v_2 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ perché $v_1, v_2 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V} \Rightarrow v_1, v_2 \in \mathcal{U}$ e $v_1, v_2 \in \mathcal{V}$

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in \mathcal{U}$ poiché $\mathcal{U} < \mathcal{W}$ e $v_1 + v_2 \in \mathcal{V}$ poiché $\mathcal{V} < \mathcal{W} \Rightarrow v_1 + v_2 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$

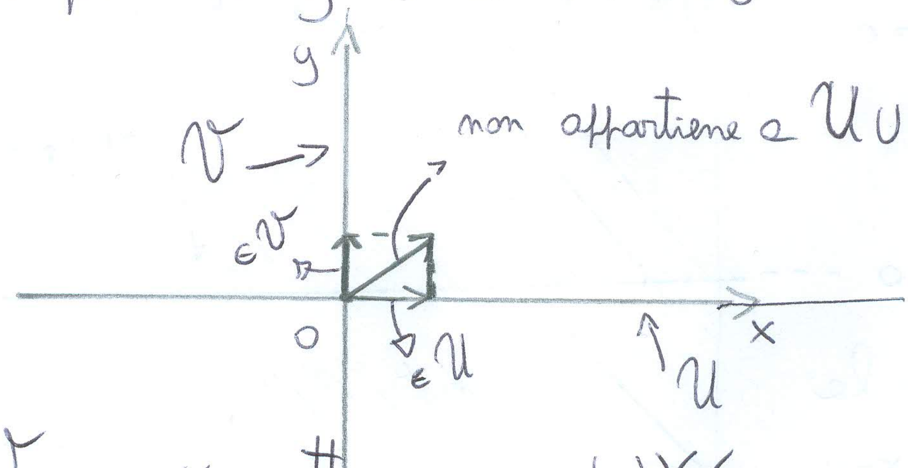
③ Analogamente per αv con $\alpha \in K$ campo (su cui è definito $\mathcal{W}$) e $v \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ (DA FARE)

$\Rightarrow \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ È SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathcal{W}$.

$\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{W}$?

Esempio 2) $\mathcal{W} = \mathbb{R}^2$ $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ rette per O

ad esempio $\mathcal{U}: y = 0$ e $\mathcal{V}: x = 0$



$\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ non è sottospazio di $\mathcal{W}$

$\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ è SOTTOINSIEME di $\mathcal{W}$ ma non è un suo sottospazio vettoriale

In generale qual è, se $\exists$, il più piccolo sottospazio di W che contiene $U \cup V$?

In ESEMPIO 2) è il piano, cioè $\mathbb{R}^2$ stesso.

NELL'ESEMPIO 1)

$W = \mathbb{R}^3 \quad U = \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \quad V = \{ x=0$

$U \cup V$ è $x=0$.

<u>Definisco</u> $U+V = \{ w \in W \mid$ ~~tali~~ $w = u+v$ con $u \in U$ e $v \in V \}$

$U \subseteq U+V, \quad V \subseteq U+V$

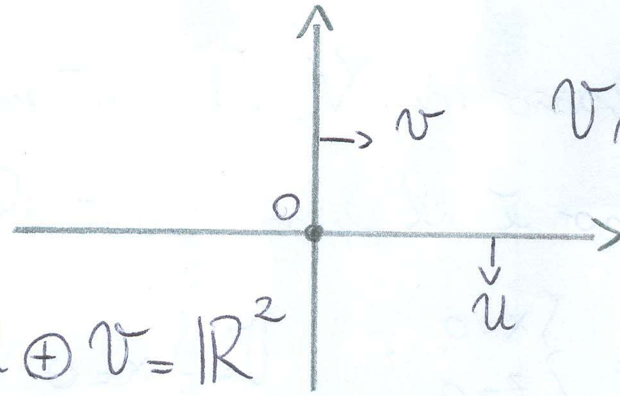
$U \cup V \subseteq U+V$ $U+V$ è detto <u>spazio</u> SOMMA

Si dimostra che $U+V$ è un sottospazio di W (<u>DA FARE</u>) e che è il più piccolo sottospazio che contiene $U \cup V$.

DEFINIZIONE:

Se $U \cap V = \{0\} \Rightarrow$ la somma di U e V si dice essere <u>DIRETTA</u> e si indica $U \oplus V$

<u>Proposizione</u> Dato un sottospazio $U < W$, esiste sempre un sottospazio $V \mid U \oplus V = W$



$V \cap U = \{0\}$

$U \oplus V = \mathbb{R}^2$

OSSERVAZIONE

Esistono infiniti sottospazi V tali che $U \oplus V = W$

Definizione

Tale sottospazio V che in somma diretta con U dà tutto W è detto <u>SUPPLEMENTARE</u> di U

IN QUESTO CASO:

Se $\dim W = n$ e $\dim U = p \Rightarrow \dim V = n - p$ POICHÈ

$\dim U + \dim V = \dim W$

$\dim U$ e $\dim V$ devono ~~essere~~ AVERE DIMENSIONI complementari.

IN GENERALE SI DIMOSTRA LA SEGUENTE:

Proposizione (Teorema (RELAZIONE) di GRASSMANN)

Dati una spazio vettoriale V, i sottospazi vettoriali U e W, con ~~[illegible]~~ $\dim V = n$, $\dim U = p$ e $\dim W = q \Rightarrow \dim U + \dim W =$

$= \dim(U + W) + \dim(U \cap W)$

DIMOSTRAZIONE

Pongo $\dim(U \cap W) = K$ e definisco una sua base $\mathcal{B}_{U\cap W} = \{v_1, \dots, v_K\} \Rightarrow$ poiché $U \cap W$ è un sottospazio di U, completo la base $\mathcal{B}_{U\cap W}$ ad una base di ~~W~~ U

$$\mathcal{B}_U = \{v_1, \dots, v_K, u_1, u_2, \dots, u_{h-K}\}$$

Analogamente $\underline{U \cap W < W} \Rightarrow$ posso definire

$$\mathcal{B}_W = \{v_1, v_2, \dots, v_K, w_1, \dots, w_{q-K}\}$$

Sia $v \in U + W \Rightarrow \exists\, u \in U$ e $w \in W \mid v =$

$$= u + w = \sum_{i=1}^{K} a_i v_i + \sum_{j=1}^{h-K} b_j u_j + \sum_{l=1}^{K} c_l v_l + \sum_{h=1}^{q-K} d_h w_h = \sum_{i=1}^{K} (a_i + c_i) v_i + \sum_{j=1}^{h-K} b_j u_j + \sum_{h=1}^{q-K} d_h w_h$$

v_i e v_l sono gli stessi (variano nello stesso modo NELLE DUE SOMMATORIE)

I vettori sono: $\sum_{i=1}^{K} \dots + \sum_{j=1}^{h-K} \dots + \sum_{h=1}^{q-K} \dots$

COMBINAZIONI LINEARI DI QUANTI GENERATORI? $\Rightarrow \cancel{K} + h\cancel{-K} + q - K$

n° di generatori $\leftarrow h + q - K$

Se dimostro che essi sono linearmente indipendenti

$\Rightarrow$ ho trovato una base di $U+W \Rightarrow$

$\Rightarrow$ la $\dim(U+W) = p+q-K = \dim U + \dim W +$

$- \dim(U \cap W)$!! COME VOLEVAMO

DIMOSTRO CHE SONO LIN. INDIPENDENTI:

⊛ Pongo' $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_K v_K + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{p-K} u_{p-K} +$

$+ \boxed{\gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_{q-K} w_{q-K}} = 0 \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_K v_K + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{p-K} u_{p-K} =$

$= -\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_{q-K} w_{q-K}$

QUESTA UGUAGLIANZA CI DA' LO STESSO VETTORE A SINISTRA SCRITTO COME COMBINAZIONE LINEARE DI VETTORI DI BASE DI U, A DESTRA COME COMBINAZIONE LINEARE DI VETTORI DI BASE DI $W \Rightarrow$ LO STESSO VETTORE STA IN U E IN W PERCIO' STA IN $U \cap W$ E LO POSSO SCRIVERE COME COMBINAZIONE LINEARE DI VETTORI DI BASE DI $U \cap W$, CIOE'

$-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_{q-K} w_{q-K} = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_K v_K \Rightarrow$ PORTO TUTTO AL II MEMBRO:

$\gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \dots + \gamma_{q-K} w_{q-K} + \delta_1 v_1 + \dots + \delta_K v_K = 0$

$\Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{q-K} = \delta_1 = \dots = \delta_K = 0$ PERCHE' I VETTORI $v_1, \dots, v_K, w_1, \dots, w_{q-K}$ SONO LINEARM. INDIPENDENTI, IN QUANTO BASE DI W

$\Rightarrow$ SOSTITUISCO i $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \dots, \gamma_{q-K} = 0$ NELLA combinazione lineare INIZIALE ⊛

$\Rightarrow$ RIMANE: $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_K v_K + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{p-K} u_{p-K} = 0$

essendo $v_1, \dots, v_K, u_1, \dots, u_{p-K}$ linearmente indipendenti PERCHE' FORMANO UNA BASE DI U

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_K = \beta_1 = \beta_2 = \dots = 0 \Rightarrow$ (ESSENDO NULLI ANCHE i γ_K) i $p+q-K$

vettori dati $\overbrace{\text{formano}}^{v_1 \dots v_K, u_1, \dots, u_{p-K}, w_1, \dots, w_{q-K}}$ una base di $U+W \Rightarrow$

$\Rightarrow \dim(U+W) = p+q-K$. CVD

Due piani, sottospazi di $\mathbb{R}^3$, possono intersecarsi solo nell'origine? NO perchè:

preso $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$ e due piani in $V = \mathbb{R}^3 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ per Grassmann $\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W} = \dim(\mathcal{U}+\mathcal{W}) +$
$+ \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$

AL PIÙ

$$2+2 = 3 + 1 \longrightarrow$$

LA DIMENSIONE DI $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ NON PUÒ ESSERE NULLA!

PIANI COINCIDENTI $\rightarrow 2+2 = 2+2$